BUKU SUMBER BAGI DOSEN LPTK

PEMBELAJARAN MATEMATIKA SMP DI LPTK

Juni 2014

Daftar Isi

Halaman

Kata Pengantar

Program Prioritizing Reform, Innovation and Opportunities for Reaching Indonesia's Teachers, Administrators and Students (PRIORITAS) yang didanai oleh USAID bekerja sama dengan pemerintah Indonesia untuk mendukung Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan serta Kementerian Agama adalah program peningkatan akses pendidikan dasar yang bermutu. Untuk mencapai tujuan tersebut, PRIORITAS mengembangkan dan melaksanakan program pengembangan kapasitas yang terdiri atas pelatihan, pendampingan, kegiatan kelompok kerja di tingkat sekolah maupun gugus. Sasaran program pengembangan kapasitas ini adalah guru dan dosen lembaga pendidikan tenaga kependidikan (LPTK), kepala sekolah, komite sekolah, serta pengawas dan staf dinas pendidikan terkait di kabupaten terpilih di tujuh propinsi mitra USAID PRIORITAS, yaitu Aceh, Sumatera Utara, Banten, Jawa Barat, Jawa Tengah, Jawa Timur, dan Sulawesi Selatan. Pelatihan bagi dosen dilaksanakan melalui kerja sama dengan sejumlah LPTK terpilih untuk pengembangan peran LPTK sebagai penyedia layanan baik untuk pendidikan guru pra-maupun pendidikan dalam-jabatan.

Buku ini disusun dalam rangka memperkaya khazanah rujukan PRAKTIS dan memberikan inspirasi kepada para dosen LPTK terutama dalam 1) pelaksanaan perkuliahan sehari-hari, 2) pelaksanaan bimbingan kepada mahasiswa calon guru dalam praktik pengalaman lapangan terpadu (PPLT), dan 3) pelaksanaan layanan kepada guru dalam jabatan.

Penyusunan dimulai dari kaji ulang materi dan pelaksanaan perkuliahan di sejumlah LTPK mitra selama ini, kemudian ditetapkan sejumlah topik yang perlu dimuat dalam buku ini.

Buku ini disusun oleh tim dosen pengampu mata kuliah matematika dari universitas mitra PRIORITAS dan sejumlah guru pengajar matematika di SMP/MTs dengan memilih beberapa topik yang berdasar pengalaman para guru masih sering disalahpahami oleh siswa atau guru sering mengalami kesulitan dalam mengajarkannya.

Terima kasih kepada Bapak/Ibu dosen dan guru yang turut serta dalam penyusunan buku ini. Semoga buku ini memenuhi harapan yang dimaksud.

Masukan dan saran dari pembaca maupun pengguna sangat kami harapkan untuk perbaikan buku ini pada masa mendatang.

Semoga bermanfaat!

Tim Penyusun

I. PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Dalam sebuah perkuliahan matematika, mahasiswa mencoba memecahkan masalah kesebangunan.

Berbagai upaya untuk meningkatkan kualitas pembelajaran di sekolah, khususnya pembelajaran matematika, telah dilakukan pemerintah Indonesia. Misalnya, pembaharuan kurikulum, penyusunan buku siswa beserta panduan guru, dan penataran guru. Namun, beberapa kalangan merasa belum puas dengan hasil yang dicapai selama ini, baik proses maupun hasil belajar siswa. Sebagian siswa masih sering mengalami kesulitan bila menghadapi soal/masalah yang menuntut berpikir tingkat tinggi (analisis, evaluasi, dan kreasi) atau masalah yang harus diselesaikan dengan cara-cara tidak rutin, yaitu masalah yang menuntut siswa menentukan sendiri strategi penyelesaiannya sebelum menggunakan berbagai rumus yang telah mereka kuasai.

Dari segi proses pembelajaran, kegiatan guru berceramah menunjukkan peningkatan, sementara interaksi guru-siswa, kegiatan siswa melakukan diskusi, ekplorasi, dan investigasi terkait gagasan-gagasan matematika menunjukkan penurunan (penelitian World Bank, tahun 2007 dan 2011). Padahal, kegiatan pembelajaran seperti melakukan eksplorasi dan investigasi/penemuan akan melatih siswa dalam menemukan strategi dan berpikir tingkat tinggi dalam memecahkan masalah.

Sebagai lembaga yang menghasilkan guru, proses pembelajaran di lembaga pendidikan tenaga kependidikan (LPTK) seyogianya memberikan gambaran konkret kepada para mahasiswa calon guru tentang suasana pembelajaran yang diharapkan terjadi di sekolah tempat mereka bekerja sebagai guru kelak. Mereka tidak hanya menguasai berbagai metode dan materi/isi mata pelajaran yang akan diajarkan nanti, tetapi juga harus mampu mengajarkan materi dengan metode-metode tersebut. Hal ini sangat mungkin terwujud apabila mahasiswa memperoleh gambaran konkret dan bahkan merasakan suasana pembelajaran yang menerapkan metode-metode tersebut. 'Modelling', yaitu dosen mengajar dengan cara yang diharapkan dilakukan oleh mahaiswa kelak ketika menjadi guru, merupakan pilihan yang tepat untuk mewujudkan pembelajaran semacam itu di lapangan/sekolah-sekolah. "Jangan hanya BERITAHUKAN, tetapi LAKUKAN metode tersebut" merupakan semboyan yang tepat untuk menunjukkan perlunya *modeling* itu.

B. Tujuan

Sementara perwujudan pembelajaran yang lebih mengaktifkan mahasiswa/siswa sedang diupayakan melalui pelatihan guru dan dosen LPTK, buku ini diharapkan dapat memberikan petunjuk praktis. Setidaknya buku ini diharapkan bisa menginspirasi para dosen LPTK dalam melaksanakan pemodelan pembelajaran matematika yang lebih mengaktifkan dan mengembangkan potensi mahasiswa calon guru SMP.

II. MATEMATIKA DAN PENDEKATAN YANG DIGUNAKAN

A. Apakah Matematika Itu?

- *Mathematics is a way of thinking. It is essentially about representing relationships in the world, and manipulating them.*

- *Mathematics is the study of patterns and relationships.*

(Robyn, Z., 2004, *Teaching Mathematics in Primary Schools*)

- *Mathematics is the science of patterns and relationships.*

(http://www.project 2061.org/publications/sfaa/online/chap2.htm)

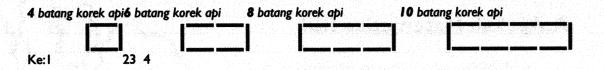
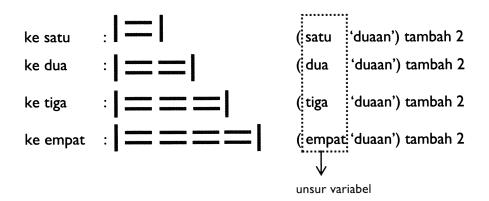
- *Mathematics is more than just numbers. Some mathematics problems do not use numbers at all. They use pictures, drawings, maps, or even cartoons. What do they have in common then? Every mathematics problem ask you to use a logical approach to find a solution.*

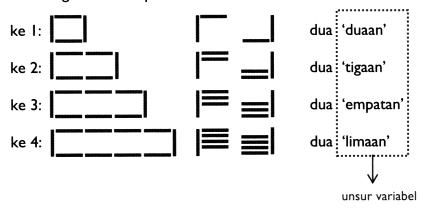
Alan R. Hoffer, Cs, 1992, *Mathematics in Action;*

Di antara empat pengertian matematika di atas dapat disimpulkan bahwa yang dipelajari atau kemampuan yang dikembangkan dalam pembelajaran matematika terkait dengan kemampuan mengidentifikasi pola/keteraturan (*patterns*), hubungan (*relationships*) antarobjek/variabel, kemampuan 'memanipulasi', dan berpikir logis.

- ***Kemampuan Mengidentifikasi Pola/Keteraturan***

Kemampuan melihat 'pola' dan membuat kesimpulan (generalisasi) sangatlah penting sebelum siswa menyajikan sesuatu dengan menggunakan lambang seperti dalam aljabar. Misalnya, ketika siswa diminta menjawab pertanyaan:

"Berapa batang korek api diperlukan pada bangun ke *n*?" dari urutan bangun berikut:

Seorang siswa mungkin melihat pola berikut:

Pola tersebut mengarah pada pernyataan simbolik: $(n \times 2) + 2$

Siswa lain mungkin melihat pola berikut:

Pola ini mengarah pada: $2 \times (n + 1)$, yang pada hakikatnya sama dengan pernyataan simbolik terdahulu: $(n \times 2) + 2$, yaitu memiliki bentuk akhir $2n + 2$.

Dalam contoh 'pola/keteraturan' ini, pengaturan batang korek api sehingga lahir 'satu duaan tambah 2, dua duaan tambah 2', dsb.; atau 'dua duaan, dua tigaan, dsb', serta pengubahan '2 x (*n* + 1) dan (n x 2) + 2 menjadi 2n + 2 merupakan kemampuan 'memanipulasi/mengubah bentuk' yang juga dikembangkan dalam pembelajaran matematika seperti yang akan dijelaskan berikut.

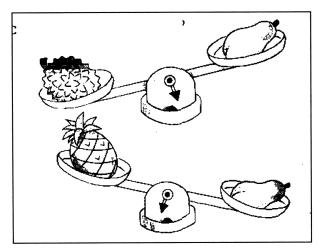
- ***Kemampuan Melihat Hubungan dan Kemampuan Memanipulasi***

Berbagai rumus dalam matematika menunjukkan hubungan antara dua atau lebih hal atau variabel. Rumus keliling lingkaran, misalnya, yaitu "Keliling = 3,14 x garis tengah" menunjukkan *hubungan* antara keliling dan garis tengah suatu lingkaran, yaitu:

a. panjang keliling suatu lingkaran sama panjang dengan panjang garis tengahnya dikalikan dengan 3,14, atau
b. panjang garis tengah suatu lingkaran sama panjangnya dengan panjang keliling lingkaran tersebut dibagi dengan 3,14, atau
c. perbandingan panjang keliling suatu lingkaran dengan diameternya adalah 3,14 berbanding 1, atau
d. bilangan ukuran keliling suatu lingkaran dibagi dengan ukuran diameternya sama dengan 3,14, atau
e. dsb (?)

Pernyataan b, c, dan d merupakan'manipulasi/pengubahan bentuk' dari pernyataan a, atau pernyataan c, d; serta a merupakan manipulasi dari pernyataan b, dan seterusnya.

- ***Kemampuan Berpikir Logis***

Rumus atau angka berapakah yang diperlukan untuk menjawab pertanyaan pada persoalan berikut? Pada peristiwa pertama, durian lebih berat daripada pepaya; dan pada peristiwa kedua, papaya lebih berat daripada nanas. Di antara dua peristiwa tersebut, manakah yang paling berat di antara tiga buah itu?

Buah apakah yang paling berat?

Tidak ada rumus atau angka yang diperlukan untuk menjawab pertanyaan pada persoalan tersebut. Hanya kemampuan berpikir logis yang diperlukan.

Matematika merupakan suatu bahan kajian yang objeknya abstrak dan dibangun melalui proses penalaran deduktif, yaitu kebenaran konsepnya merupakan akibat logis dari kebenaran sebelumnya sehingga keterkaitan antarkonsep dalam matematika bersifat sangat kuat dan jelas (Depdiknas, 2003b). Objek matematika dikatakan abstrak karena objeknya adalah hal-hal yang dapat dipikirkan, tetapi tidak dapat dijangkau oleh panca indera. Penalaran deduktif, seringkali disebut pula sebagai pola pikir deduktif, adalah pola pikir yang dimulai dari hal umum menuju ke hal khusus. Suatu kebenaran dalam matematika harus teruji dari pola pikir deduktif. Meminjam istilah Soedjadi, hakim tertinggi dalam matematika terletak pada pola pikir deduktif atau strukturnya. Karena menggunakan pola pikir deduktif, kebenaran dalam matematika adalah kebenaran konsistensi. Kekonsistenan dalam matematika terlihat dari syaratnya, bahwa kebenaran yang diperoleh diturunkan dari kebenaran terdahulu yang sudah disepakati. Selain berobjek abstrak, simbol matematika kosong dari arti. Kosong dari arti tidak berarti tidak mempunyai arti, tetapi artinya tergantung pada semesta pembicaraan. Jadi, simbol matematika baru memiliki arti setelah diberikan makna kepadanya

(Suriasumantri, 1995). Meskipun proses penalaran matematika adalah proses penalaran deduktif, proses penalaran induktif boleh dilakukan dalam pembelajaran matematika. Proses penalaran induktif dilakukan pada awal pembelajaran yang kemudian dilanjutkan dengan proses penalaran deduktif untuk menguatkan pemahaman yang sudah dimiliki siswa (Depdiknas, 2003b).

Menurut Begle, objek langsung matematika dapat dibedakan menjadi fakta, konsep, operasi, dan prinsip. Sementara menurut Bell, objek langsung matematika dapat dibedakan menjadi fakta, konsep, kecakapan/*skill*, dan prinsip (dalam Soedjadi, 1985).

Fakta adalah kesepakatan dalam matematika yang merupakan cara khas untuk menyajikan ide matematika dalam bentuk lambang, Misalnya, lambang bilangan (0, 1, 2, 3, dan sebagainya), lambang operasi matematika (+, -, x, ÷, √, pangkat); juga 2 + 3 = 5, 8 x 7 = 56; √16 = 4.

Konsep adalah ide matematika untuk melakukan klasifikasi tentang objek atau kajian. Seseorang yang memahami suatu konsep akan dapat mengklasifikasi apakah suatu objek atau kejadian tersebut termasuk dalam contoh atau bukan contoh konsep yang sedang dibicarakan. Misalnya, konsep segitiga, lingkaran, bilangan bulat, dan bilangan cacah. Istilah lain dari konsep adalah definisi/pengertian (konsep segitiga sama juga dengan definisi segitiga).

Kecakapan/*Skill* adalah operasi atau prosedur (urut-urutan mengerjakan) yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah dalam matematika dengan cepat dan tepat. Misalnya, CARA MENCARI HASIL BAGI suatu bilangan dengan bilangan lain.

Prinsip menyatakan hubungan antara dua atau lebih objek matematika. Dengan demikian, prinsip adalah objek matematika yang paling kompleks karena dia mengaitkan sekumpulan objek matematika. Contohnya, prinsip komutatif dalam penjumlahan, yaitu dalam penjumlahan, misalnya 2 + 3, hasilnya akan tetap sama bila tempatnya dipertukarkan menjadi 3 + 2 alias 2 + 3 = 3 + 2; demikian juga dalam perkalian 5 x 6 = 6 x 5. Lain halnya pembagian. Dalam pembagian, tidak berlaku prinsip komutatif (8 ÷ 2 tidak sama dengan 2 ÷ 8).

MATEMATIKA DAN PENDEKATAN YANG DIGUNAKAN

Untuk mempelajari matematika, siswa memerlukan interaksi langsung dengan lingkungannya. Berinteraksi langsung dengan lingkungan dapat mengembangkan kepekaan/*sense* siswa terhadap bidang kajian matematika. Interaksi dengan lingkungan juga dapat mengaktifkan siswa dalam pembelajaran. Keaktifan siswa dalam pembelajaran merupakan hal penting agar mereka memahami matematika dengan baik. "Dunia nyata" dalam pembelajaran matematika digunakan untuk membangun konsep matematika dan sebagai tempat untuk mengaplikasikannya. Dengan demikian, matematika tidak diberikan dalam bentuk jadi, tetapi matematika sebagai suatu aktivitas.

Merujuk pada pengertian matematika di awal bab 2 ini, bahwa matematika adalah studi tentang pola, hubungan, dan berpikir logis, seyogianya pembelajaran matematika merupakan KEGIATAN menyelidiki dan/atau menemukan pola/hubungan yang sekaligus memicu dan mengasah berpikir logis.

Bila pengertian matematika akan dibahas dengan mahasiswa Saudara,

- *bagaimanakah garis besar langkah pembahasan itu yang mengaktifkan mahasiswa dan pengertian matematika lahir dari mahasiswa?*
- *Bila pengertian matematika dari mahasiswa itu TIDAK seperti yang dikemukakan para ahli, apa yang akan Saudara lakukan agar mahasiswa tetap aktif dalam belajarnya?*

B. Pendekatan Pembelajaran Matematika

Salah satu tujuan pembelajaran adalah mengembangkan kompetensi siswa. Dalam matematika, kompetensi mengandung dua aspek, yakni **material** dan **formal**. Aspek material menggambarkan penguasaan konsep dan keterampilan (menghitung, menggunakan rumus), sedangkan aspek formal menggambarkan pengembangan nalar siswa (formal ----- *to form* = membentuk).

Jika suatu rumus matematika dijelaskan oleh guru/dosen (tidak ditemukan siswa), nalar siswa tidak berkembang. Alur lahirnya rumus mengandung nalar (aspek formal). Karena alur tersebut dijelaskan guru, dosen, atau penulis buku, nalar tersebut adalah nalar guru, bukan nalar siswa. Siswa hanya menerima nalar guru sehingga nalarnya sendiri kurang terasah.

Latihan soal oleh siswa menunjukkan upaya agar siswa menguasai keterampilan, dalam hal ini keterampilan menggunakan rumus. Sering terjadi siswa sudah mengetahui berbagai rumus, tetapi ketika dihadapkan pada persoalan, mereka tidak tahu rumus mana yang harus digunakan untuk menyelesaikan persoalan tersebut. Menentukan rumus mana yang harus digunakan berarti menuntut pemahaman terhadap persoalan dan memahami persoalan memerlukan nalar/berpikir logis.

Pembelajaran kontekstual/aktif sangat relevan untuk mengembangkan dua aspek tersebut, bahkan dapat dikatakan lebih pada aspek formal seperti:

- Melatih cara berpikir dan bernalar dalam penarikan kesimpulan, misalnya melalui kegiatan penyelidikan, eksplorasi.
- Mengembangkan pemikiran divergen.
- Mengembangkan kemampuan pemecahan masalah.
- Mengembangkan kemampuan mengkomunikasikan gagasan antara lain melalui grafik, diagram.

Coba bandingkan tugas/pertanyaan pada kolom sebelah kiri dan kolom sebelah kanan berikut. Apa perbedaan dampak terhadap berpikir siswa dari tugas pada masing-masing kolom?

Carilah hasilnya/Berapakah hasil dari 26 35 + ――	**Dengan angka 2, 3, 5, dan 6,** • **penjumlahan bilangan 2 angka mana sajakah yang dapat kamu susun?** • **bagaimanakah angka-angka itu harus disusun agar hasil penjumlahannya terbesar?**

Tugas/pertanyaan pada kolom kiri menuntut siswa untuk mengingat tidak lebih dari 2 hal: 1) hasil jumlah bilangan 1 angka, yaitu 6 + 5, 1 + 2, dan 3 + 3; 2) teknik menyimpan untuk penjumlahan 2 bilangan yang hasilnya 10 atau lebih. Dua hal ini termasuk aspek material. Sementara tugas pada kolom kanan, selain dituntut 2 hal di atas, siswa dituntut 2 hal lainnya, yaitu 1) berpikir alternatif/divergen, yaitu menemukan berbagai kemungkinan bentuk penjumlahan 2 bilangan dua angka; dan 2) menemukan susunan angka yang menyebabkan hasil penjumlahan menjadi terbesar. Bila tugas ditambah dengan mengajukan pertanyaan: "Mengapa susunan itu menyebabkan hasil terbesar?", pikiran terpicu lagi untuk melakukan penyelidikan lebih lanjut.

Tugas/pertanyaan terakhir ini ("Mengapa susunan itu menyebabkan hasil terbesar?") menuntut siswa untuk 'berargumentasi'. Mereka menemukan *hubungan* antara susunan angka dan hasil jumlah. Dua hal tambahan ini merupakan kemampuan matematika yang termasuk aspek formal. Dengan perkataan lain, tugas pada kolom kanan mengembangkan kedua aspek, sedangkan tugas pada kolom kiri hanya satu aspek, yaitu aspek material dari kemampuan matematika. Dengan kata lain pula, dalam pembelajaran aktif, materi pelajaran matematika sebaiknya disajikan dalam bentuk seperti pada kolom kanan. Mungkin tidak semua materi dapat diolah seperti itu, namun bagi materi yang mungkin 'mengapa tidak?'.

Bagaimana dengan Saudara selama ini mengajar matematika: lebih mengembangkan aspek material atau aspek formal?

Apakah sekarang jelas mengapa mahasiswa/siswa mengalami kesulitan dalam menghadapi persoalan matematika yang menuntut berpikir analitis dan sintesis?

Paling sedikit terdapat tiga cara 'mengolah' materi matematika untuk mengembangkan kemampuan siswa, terutama yang beraspek formal, yaitu diolah dengan nuansa penyelidikan, penemuan, dan pemecahan masalah.

B.1 Penyelidikan

Materi diolah sedemikian rupa sehingga mendorong siswa untuk *mengamati pengaruh suatu variabel terhadap variabel lain.*

Topik/Konsep	Nuansa Biasa	Nuansa 'Penyelidikan'
Luas persegi panjang	Jika diketahui panjang suatu persegi panjang 6 cm dan lebar 4 cm, berapakah luas persegi panjang itu?	Apa yang terjadi dengan luas persegi panjang jika panjang dan lebarnya diperbesar 2 kali? 3 kali? dari semula?
Luas lingkaran	Diketahui jari-jari sebuah lingkaran sama dengan 7 cm, berapakah luas lingkaran itu?	Apakah luas suatu lingkaran menjadi 2 kali semula bila jari-jarinya diperbesar 2 kali? menjadi 3 kali bila diperbesar 3 kali? dan seterusnya.
Volum balok	?	?

Pada contoh pertama (luas persegi panjang), siswa didorong untuk mengamati pengaruh variabel ukuran panjang dan lebar terhadap luas persegi panjang. Pada contoh kedua (luas lingkaran), mengamati pengaruh variabel ukuran jari-jari terhadap luas lingkaran.

B.2 Penemuan

Materi diolah sedemikian rupa sehingga mendorong siswa untuk *menemukan pola/keteraturan, hubungan, rumus, bangun, atau cara*. Berpikir alternatif dapat dikategorikan kedalam 'penemuan' karena siswa menemukan cara lain memecahkan suatu persoalan.

Topik/Konsep	Nuansa Biasa	Nuansa 'Penemuan'
Bilangan	Dari 1, 4, 9, dan 16, manakah yang termasuk bilangan genap?	Bilangan manakah berikutnya? • 1, 4, 9, 16, ... • 2, 6, 12, 20, ...
Bangun datar	Apa nama bangun-bangun berikut: □, △, ▭, dan ○	Bangun apakah berikutnya? □, △, ▭, ○, □, ...
Keliling Lingkaran	Berapa luas lingkaran yang bergaris tengah 14 cm?	Apa yang dapat kamu temukan dari perbandingan keliling dan diameter suatu lingkaran?
Rata-rata/'Mean'	Berapa rata-rata dari 3, 4, 5, 6, dan 7?	Lima bilangan mana saja yang rata-ratanya 5?

B.3 Pemecahan Masalah

Materi diolah sedemikian rupa sehingga mendorong siswa untuk *menemukan terlebih dahulu* cara/strategi/hubungan sebelum menyelesaikan suatu masalah matematika.

Topik/Konsep	Nuansa Biasa	Nuansa 'Pemecahan Masalah'
Pecahan	2/3 – 1/4 = ... 3/4 – 1/3 = ...	2/3 3/4 ?
	Berapa bagian yang dihitamkan berikut?	Berapa bagian yang dihitamkan berikut?
Bilangan bulat	6 – 2 = ...	Buku Ani 2 buah lebih banyak daripada buku Ucok. Buku Ani 6 buah. Berapa buah buku Ucok?

Soal pada kolom tengah sudah menunjukkan kejelasan tentang apa yang diperbuat siswa, yaitu 'mengurangkan' atau membilang. Soal pada kolom paling kanan menuntut siswa untuk menemukan terlebih dahulu 'logika'/cara penyelesaian sebelum menyelesaikannya. Soal tidak memberikan kejelasan apa yang harus dilakukan siswa.

Sejumlah materi/konsep matematika mungkin lebih cocok/mudah diolah ke nuansa penyelidikan, sedangkan yang lainnya ke nuansa penemuan atau pemecahan masalah atau mungkin terdapat konsep yang dapat diolah ke dalam dua, bahkan tiga nuansa tersebut.

Pada saat persiapan mengajar selama ini, pendekatan manakah yang sering Saudara gunakan dalam mengolah materi matematika: penyelidikan, penemuan, atau pemecahan masalah?

Pengolahan materi seperti itu mungkin lebih didasarkan pada pandangan filsafati terhadap matematika sebagai 'kegiatan manusia' ketika menghadapi masalah (sebagaimana dijelaskan terdahulu). Karena itu, dalam pembelajarannya, siswa didorong untuk berpikir sendiri, menemukan (strategi) sendiri, dan berani/terbiasa mengungkapkan pendapat. Sementara pengolahan materi yang lebih mengembangkan aspek material lebih didasarkan pada pandangan matematika 'sebagai alat' sehingga dalam pembelajarannya siswa diberi tahu tentang bahan kajian matematika (rumus dan sebagainya), dijelaskan bagaimana menggunakannya, dan kemudian diminta berlatih menggunakannya. Pandangan kedua menyebabkan siswa pasif, sedangkan yang pertama membuat siswa aktif belajar. Dua pandangan dan dampaknya terhadap pembelajaran tersebut digambarkan secara diagramatik sebagai berikut:

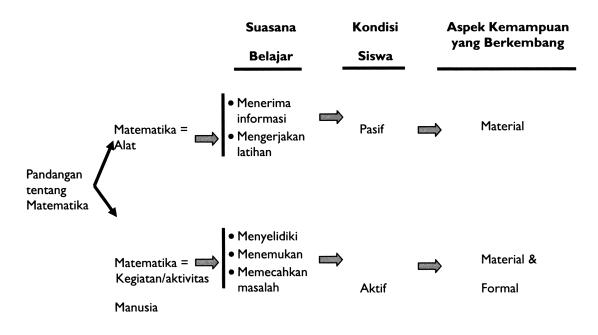



Diagram 1: Pandangan tentang Matematika dan Implikasi terhadap Suasana Belajar

Diagram di atas diharapkan dapat mendorong para dosen/guru untuk merancang pembelajaran yang mendorong mahasiswa/siswa untuk melakukan penyelidikan, penemuan, dan/atau pemecahan masalah ketika belajar matematika.

- ***Pandangan manakah yang selama ini mewarnai model mengajar Saudara: matematika sebagai alat atau matematika sebagai kegiatan manusia?***
- ***Dikaitkan dengan kemajuan teknologi, apa sajakah dampak jangka panjang bagi si pebelajar bila kita mengajar lebih mencerminkan pandangan matematika sebagai alat?***

C. Model Pembelajaran

Proses pembelajaran matematika yang masih sering terjadi di kelas, pada umumnya,mencerminkan 'model' dengan urutan sebagai berikut:

1. Guru menjelaskan suatu konsep atau rumus.
2. Guru memberikan contoh:
   - suatu objek yang termasuk dalam konsep tersebut, atau
   - penggunaan rumus tersebut.
3. Guru meminta siswa untuk:
   - mencari contoh objek lain yang termasuk dalam konsep tersebut, atau
   - menyelesaikan soal latihan dengan menggunakan rumus yang baru dijelaskan guru.
4. Guru memberi pekerjaan rumah untuk menyelesaikan soal yang serupa dengan soal yang diberikan saat latihan.

Gambaran proses pembelajaran di atas menunjukkan bahwa guru belum memberikan kesempatan kepada siswa untuk melakukan suatu aktivitas dalam membangun konsep atau menemukan rumus. Biasanya, dalam memberi soal pun guru sangat sering memberi soal tertutup, yaitu soal dengan penyelesaian dan selesaian tunggal. Guru tidak terbiasa memberi soal terbuka, soal dengan penyelesaian atau selesaian tidak tunggal. Padahal, pemberian soal terbuka bisa mengembangkan kreativitas siswa serta menanamkan sikap bahwa kebenaran dan cara mencari kebenaran tidaklah tunggal.

Untuk memungkinkan siswa/mahasiswa membangun sendiri (dengan sedikit bantuan guru/dosen) konsep atau rumus, perlu digunakan model lain dalam pembelajaran matematika. Model-model tersebut, antara lain, model pembelajaran berbasis masalah dan model pembelajaran pencapaian konsep (tipe deduktif dan tipe induktif).

C.1 Model Pembelajaran Berbasis Masalah (*Problem-based Learning*)

Urut-urutan kegiatan pembelajaran dalam model pembelajaran berbasis masalah adalah sebagai berikut:

1. *Penyampaian Tujuan Pembelajaran*

   Guru/dosen menyampaikan tujuan pembelajaran yang akan dicapai.

2. *Pemberian Masalah*

   Mahasiswa diberi masalah, misal sebagai berikut:

   Rasya membuat susunan kelereng seperti gambar berikut.

Jika Rasya ingin kelereng di baris paling bawah banyaknya 20 kelereng, berapa banyak kelereng yang diperlukan Rasya?

Buatlah beberapa alternatif jawaban siswa.

3. *Memahami Masalah*

   Mahasiswa ditanya: apa yang dipahami mereka dari masalah tersebut?

   Alternatif jawaban siswa/mahasiswa:

   - Masalah tersebut adalah barisan aritmetika.
   - Mencari jumlah n suku pertama dari barisan aritmetika.
   - Mencari banyak kelereng.
   - Mencari suku ke n dari barisan aritmetika.
   - Masalah tersebut adalah masalah kelereng.

   (Dosen mengingatkan mahasiswa bahwa mereka harus membuat alternatif jawaban siswa jika soal tersebut diberikan kepada siswa SMP).

4. *Perancangan Pemecahan Masalah*

   Mahasiswa merancang rencana untuk memecahkan masalah dan mengidentifikasi sumber daya yang dibutuhkan

Untuk menyelesaikan masalah tersebut, berikut rancangan yang dibuat mahasiswa.

- Melanjutkan gambar sampai baris paling bawah dari gambar tersebut menggambarkan 20 kelereng.
- Membuat barisan aritmetika yang sesuai dengan gambar.
- Menuliskan rumus jumlah n suku pertama barisan aritmetika.

5. *Pengumpulan Informasi*

   Mahasiswa mulai mengumpulkan informasi ketika mereka bekerja memecahkan masalah itu.

   - Alternatif informasi yang dikumpulkan mahasiswa.
   - Bagaimana cara membilang (menggunakan korespondensi 1-1).
   - Karakteristik yang dimiliki susunan kelereng (sesuai dengan barisan aritmetika).
   - Hubungan antara suku pertama (a), beda (b), suku ke-n (U_n), jumlah n suku pertama barisan aritmetika (S_n).

6. *Penyelesaian Masalah*

   Untuk menyelesaikan masalah tersebut (individual atau kelompok), berikut alternatif yang dikerjakan mahasiswa:

   - Membilang banyak kelereng yang terdapat pada gambar yang dibuatnya.

$$\begin{array}{l} 2 + 4 + 6 + \ldots + 20 \\ 20 + 18 + 16 + \ldots + 2 \\ \hline 22 + 22 + 22 + \ldots + 22 \end{array} +$$

Ada 10 suku. Jadi, banyak kelereng sama dengan $\frac{1}{2}$ (10 x 22) = 110 butir.

- Barisan 2 + 4 + 6 + ... + 20 adalah barisan aritmetika dengan suku pertama 2, beda 2, dan suku terakhir 20.

$U_n = a + (n - 1)\,b$

$20 = 2 + (n - 1)\,2$

$20 = 2 + 2n - 2$

$2n = 20$

$n = 10$

$S_n = \frac{1}{2}\,n\,(a + U_n)$

$S_{10} = \frac{1}{2}\,10\,(2 + 20) = 5\,(22) = 110$

Jadi, banyak kelereng 110 butir.

7. *Refleksi*

Mahasiswa melakukan refleksi dengan berpandu pada pertanyaan berikut:

- Apa yang mereka petik/pelajari/pahami?
- Apa yang mereka belum pahami? dan
- Apa perasaan mereka selama pembelajaran?

C.2 Model Pembelajaran Pencapaian Konsep (Tipe Deduktif)

Urut-urutan kegiatan pembelajaran dalam model pencapaian konsep tipe deduktif adalah sebagai berikut:

Topik: Segiempat - Membangun Konsep Jajargenjang

1. *Memberi Definisi*

   Misalnya, dosen/guru memberikan definisi jajargenjang sebagai berikut:

   Jajargenjang adalah segiempat yang mempunyai sepasang sisi yang sama dan sejajar.

2. *Memberi Contoh dan Bukan Contoh*

   Berdasar definisi tersebut, dosen/guru memberi contoh dan bukan contoh jajargenjang.

Dosen/guru mengajukan pertanyaan kepada mahasiswa/siswa:
"Mengapa gambar-gambar bangun geometri yang ditunjukkan merupakan contoh atau bukan contoh bangun yang berbentuk jajargenjang?"

3. *Memberi Latihan*
   a. Siswa/mahasiswa diminta menentukan mana yang merupakan gambar contoh jajargenjang dan mana yang merupakan gambar bukan contoh jajargenjang.
   b. Guru mengajukan pertanyaan kepada siswa/mahasiswa, mengapa gambar-gambar tersebut merupakan gambar contoh bangun yang berbentuk jajargenjang atau bukan jajargenjang.
4. *Tahap Aplikasi*
   Siswa/mahasiswa diminta untuk mencari benda-benda di sekitarnya yang berbentuk jajargenjang.

C.3 Model Pembelajaran Pencapaian Konsep (Tipe Induktif)

Urut-urutan kegiatan pembelajaran dalam model pencapaian konsep tipe induktif adalah sebagai berikut:

Topik: Segiempat - Membangun Konsep Jajargenjang

1. *Tahap Terbuka*
   Guru memberikan contoh dan bukan contoh bangun jajargenjang.

2. *Tahap Konvergen*

   c. *Mengidentifikasi sifat-sifat kritis*
   Siswa diminta mengamati gambar bangun-bangun yang termasuk jajargenjang dan gambar bangun-bangun yang tidak termasuk jajargenjang.
   Siswa diminta mengidentifikasi ciri-ciri masing-masing bangun dan bukan bangun jajargenjang.

d. *Membuat Hipotesis*

Guru memberitahukan bahwa nama bentuk bangun yang dimaksud adalah jajargenjang.

Siswa diminta untuk membuat hipotesis tentang definisi jajargenjang berdasarkan ciri-ciri yang dimiliki oleh bangun yang dimaksud.

e. *Menguji Hipotesis*

Ketepatan hipotesis-hipotesis yang dibuat siswa diuji dengan contoh dan bukan contoh jajargenjang.

3. *Penutup (Menetapkan definisi jajargenjang)*

Dari hipotesis-hipotesis definisi jajargenjang yang dibuat siswa, dipilih atau disepakati definisi jajargenjang.

4. *Tahap Aplikasi*

Siswa diminta mencari benda-benda di sekitarnya yang berbentuk jajargenjang.

Model-model tersebut masih harus dipadukan dengan 'model' pengelolaan kelas/kegiatan yang dijelaskan di muka. Misalnya, ketika siswa/mahasiswa menyelesaikan masalah (Langkah 2 Pembelajaran Berbasis Masalah), apakah hal tersebut akan dilakukan perorangan, berpasangan, atau kelompok?

Bila pengertian pendekatan penyelidikan, penemuan, pemecahan masalah, 'problem-based learning', model pembelajaran pencapaian konsep induktif/deduktif ini akan diajarkan kepada mahasiswa Saudara,

- ***bagaimanakah garis besar langkah pembelajaran yang mengaktifkan mahasiswa terkait dengan pendekatan dan model tersebut?***
- ***siapakah yang menjelaskan pertama pengertian pendekatan penyelidikan, penemuan, pemecahan masalah, dan problem-based learning, dan model pembelajaran pencapaian konsep induktif/deduktif: dosen atau mahasiswa? Mengapa?***

D. Soal/Masalah dalam Matematika

Pendekatan penyelidikan, penemuan, dan pemecahan masalah dalam pembelajaran matematika sering diwujudkan dalam bentuk persoalan/masalah. Uraian singkat terkait berbagai aspek soal/masalah dalam matematika berikut diharapkan dapat membantu para dosen/guru dalam merancang soal/masalah matematika yang berkualitas. Soal/masalah dalam matematika dapat beragam dilihat dari segi konteks masalah, sifat masalah, dan cara penyelesaian masalah.

1. Konteks Masalah

   Soal/Masalah dalam matematika sering disajikan dalam dua konteks, yaitu **kehidupan nyata** dan **bahasa matematik**. Konteks kehidupan nyata biasanya disajikan dalam bentuk soal cerita, sedangkan konteks bahasa matematik disajikan dalam bentuk simbol dan lambang. Selain itu, terdapat rentangan antara konteks bahasa matematika (abstrak) hingga konteks kehidupan nyata (konkret) sebagai berikut:

   - *Abstrak*

   Murni matematika. Misalnya, "*Hitunglah luas segienam beraturan berikut*".

   - *Kontekstual*

   Masalah matematika yang dituangkan dalam konteks yang 'dibuat-buat'.

   Misalnya, "*Pak Ali memiliki kolam taman berbentuk segienam beraturan dengan sisi 100 cm. Berapa luas kolam tersebut?* "

   - *'Tangibel'*

   Masalah matematika yang ada dalam benda yang dapat disentuh siswa. Misalnya, "*Hitunglah luas bata berbentuk segienam beraturan ini*"

   - *Realistik*

   Masalah yang didasarkan pada kenyataan, tetapi tanpa tujuan tertentu. Misalnya, "*Berapakah jumlah bata segienam beraturan yang diperlukan untuk menutupi halaman sekolah ini?*"

   - *Riil/Nyata*

     Masalah nyata yang harus diselesaikan. Misalnya, "*Sekolah akan menutupi halamannya dengan batako segienam beraturan. Siswa diminta menghitung jumlah batako yang diperlukan*".

2. Sifat Masalah

   Dari segi 'keluasan jawabannya', masalah dalam matematika meliputi masalah/soal **terbuka** dan masalah **tertutup**. Masalah terbuka adalah masalah/soal yang jawaban benarnya tidak tunggal, sedangkan masalah tertutup adalah masalah yang jawaban benarnya tunggal.

3. Cara Penyelesaian Masalah

   Dari segi tuntutan carasoal diselesaikan, masalah dikategorikan sebagai **soal rutin** dan **soal tidak rutin**. Soal rutin adalah soal yang dapat diselesaikan langsung dengan menggunakan rumus atau definisi. Sementara soal tidak rutin menuntut si penyelesai soal untuk menentukan sendiri cara/strategi penyelesaian soal tersebut sebelum menggunakan berbagai rumus, contohnya soal di bawah ini.

   > *Seorang bapak ingin menutup lubang plafon rumahnya yang berbentuk persegi panjang dengan kawat kasa. Kemudian ia pergi ke toko material untuk membeli kawat tersebut. Pihak toko menyampaikan bahwa ukuran kawat ada dua macam, yang lebarnya 90 cm dan yang 100 cm. Si bapak bingung harus beli yang mana dan berapa meter agar kawat yang dibeli efisien/tidak banyak yang terbuang ketika dipakai untuk menutupi lubang tersebut.*

   Soal/masalah seperti ini memerlukan penyelesaian secara tidak rutin karena bila seseorang sudah mengetahui rumus luas persegi panjang pun, dia tidak dengan segera dapat menyelesaikan soal tersebut.

Dengan demikian, masalah dalam matematika dapat beragam sebagai hasil dari kombinasi tiga hal itu (konteks, sifat, dan cara penyelesaian) sebagai berikut:

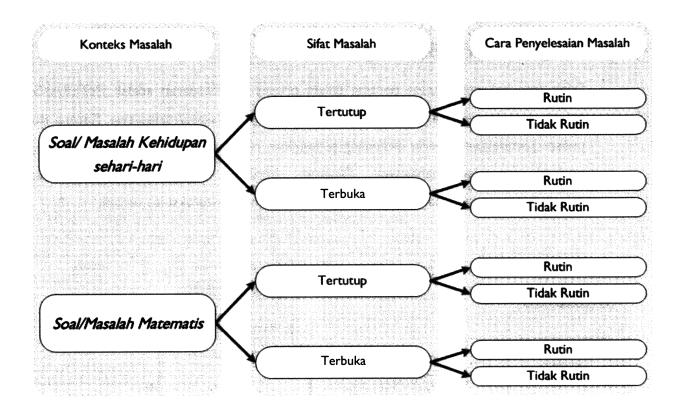



Diagram 2: Variasi Masalah

Diagram di atas secara teoretik menunjukkan bahwa terdapat:

1. Soal kehidupan nyata yang tertutup dan dapat diselesaikan dengan cara rutin.
2. Soal kehidupan nyata yang tertutup dan menuntut cara penyelesaian tidak rutin.
3. Soal kehidupan nyata yang terbuka dan dapat diselesaikan dengan cara rutin.
4. Soal kehidupan nyata yang terbuka dan menuntut cara penyelesaian tidak rutin.
5. Soal matematik yang tertutup dan dapat diselesaikan dengan cara rutin (Misal: 2+3 = ….).
6. Soal matematik yang tertutup dan menuntut cara penyelesaian tidak rutin.
7. Soal matematik yang terbuka dan dapat diselesaikan dengan cara rutin (Misal: …. + …. = 5).
8. Soal matematik yang terbuka dan menuntut cara penyelesaian tidak rutin.

Masih perlu dicermati apakah pada kenyataannya delapan jenis/bentuk soal tersebut dapat dibuat atau ada dalam kehidupan sehari-hari.

E. Pengelolaan Kelas/Kegiatan

Salah satu hal yang sangat penting dalam proses pembelajaran adalah INTERAKSI antara siswa/mahasiswa dan guru/dosen, terutama antarsiswa/mahasiswa. Karena itu, proses pembelajaran perlu dirancang sedemikian rupa sehingga terjadi interaksi yang optimal antarsiswa/mahasiswa. Diagram berikut memperlihatkan beberapa kemungkinan pengelolaan kegiatan yang memungkinkan interaksi itu terjadi.

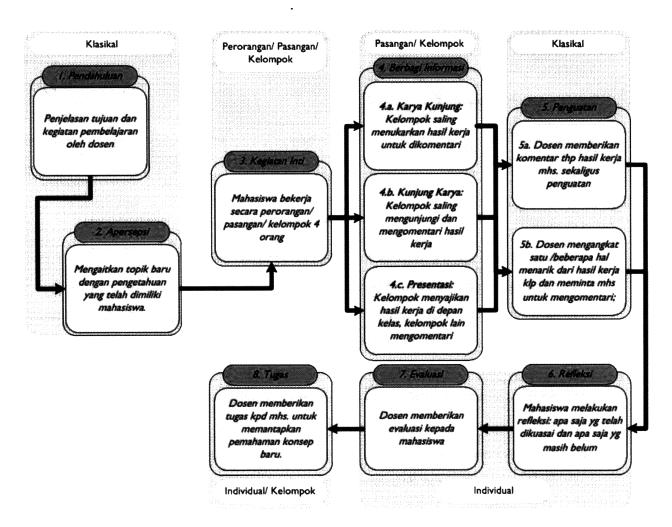



Diagram 3: Pola Umum Alur Pembelajaran

Kemungkinan 1: 1 → 2 → 3 → 4a → 5a → 6 → 7 → 8

Kemungkinan 2: 1 → 2 → 3 → 4a → 5b → 6 → 7 → 8

Kemungkinan 3: 1 → 2 → 3 → 4b → 5a → 6 → 7 → 8

Kemungkinan 4: 1 → 2 → 3 → 4b→ 5b→ 6 → 7→ 8

Kemungkinan 5: 1 → 2 → 3 → 4c→ 5a → 6 → 7→ 8

Kemungkinan 6: 1 → 2 → 3 → 4c→ 5b→ 6 → 7→ 8

Diagram di atas memperlihatkan hanya sebagian kemungkinan pengelolaan kegiatan. Di luar diagram tersebut pasti ada sejumlah kemungkinan yang lebih banyak lagi. Beberapa kemungkinan alur di atas diharapkan dapat menginspirasi dalam menciptakan skenario lain yang menimbulkan interaksi yang lebih optimal lagi.

Alokasi waktu untuk masing-masing kegiatan pada petak di atas seyogianya diatur sedemikian rupa sehingga waktu untuk penjelasan tujuan dan refleksi masing-masing tidak lebih dari 10 menit dan alokasi waktu untuk 'mahasiswa bekerja' (petak 2) merupakan yang terbanyak dibandingkan yang lainnya.

Terkait dengan interaksi sewaktu proses pembelajaran, terdapat pengategorian interaksi guru saja, interaksi guru-siswa, dan interaksi siswa saja. Interaksi guru saja adalah suatu keadaan ketika guru memimpin kelas dan menyajikan sesuatu kepada semua siswa.Interaksi guru-siswa adalah penyajian dilakukan oleh guru maupun siswa kepada semua siswa lain. Sementara interaksi siswa saja ialah penyajian dilakukan oleh (seorang) siswa kepada guru atau siswa lain.

Hasil suatu studi menunjukkan bahwa interaksi guru saja atau siswa saja sama-sama memiliki hubungan negatif dengan hasil belajar siswa. Artinya, interaksi tersebut tidak berdampak positif terhadap hasil belajar siswa. Sementara interaksi guru-siswa memiliki hubungan yang positif. Sehubungan dengan hal itu, tim studi menyarankan agar guru tetap terlibat walaupun suatu kegiatan pembelajaran didominasi siswa. Keterlibatan guru dapat berupa memonitor, berdiskusi, dan memberikan dorongan kepada siswa. Hasil studi tersebut dan sarannya mungkin berlaku juga bagi pembelajaran dalam konteks dosen-mahasiswa.

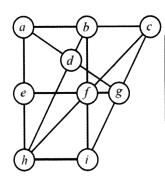
Pola umum alur pembelajaran di atas akan digunakan pada penyajian contoh-contoh kegiatan pembelajaran untuk beberapa topik/konsep matematika dengan beberapa penyesuaian.

III. PEMBELAJARAN MATEMATIKA

Pengantar

Pada bab III ini akan dibahas beberapa topik matematika yang dianggap penting dalam arti antara lain siswa/mahasiswa sering memiliki pemahaman yang salah atau guru/dosen sulit mengajarkannya. Pada tiap topik/konsep akan diuraikan hal yang terkait dengan konteks penggunaan, peta konsep, kesalahan pemahaman konsep (masukan dari guru di lapangan), proses pembelajaran, dan soal-soal yang menuntut berpikir tingkat tinggi.

Proses pembelajaran yang disajikan hanyalah salah satu kemungkinan yang dapat dipilih dalam membelajarkan suatu konsep matematika. Para dosen dapat menambah, mengurangi, atau bahkan mengembangkan sendiri proses pembelajaran konsep tersebut.

Selanjutnya disajikan beberapa kegiatan yang mendorong siswa melakukan penyelidikan, penemuan, dan pemecahan masalah. Kegiatan ini tidak dilengkapi langkah-langkah kegiatan yang lengkap, tetapi hanya sebagai pemicu gagasan. Kegiatan yang lengkap diharapkan dapat dirancang sendiri oleh dosen dengan mengambil gagasan dari alternatif 'skenario kegiatan' yang diuraikan pada butir II. E: Pengelolaan Kelas/Kegiatan.

Bilangan

I. Pengantar

Bilangan adalah sebuah konsep matematika yang kompleks dan multi bentuk. Pemahaman yang kaya akan bilangan merupakan pemahaman relasional, melibatkan banyak ide, hubungan, dan keterampilan yang berbeda. Setiap siswa datang ke kelas tidak dengan pikiran yang kosong. Mereka memiliki pengalaman atau skema dalam pikiran mereka. Begitu juga ide tentang bilangan. Ide-ide ini harus mampu dikembangkan dan dikaitkan dengan hubungan-hubungan yang baru selama kegiatan pembelajaran. Perlu waktu dan banyak pengalaman bagi siswa untuk mengembangkan pemahaman yang utuh tentang bilangan.

Pada awalnya, bilangan adalah suatu konsep matematika yang digunakan untuk pencacahan dan pengukuran. Simbol atau lambang yang digunakan untuk mewakili suatu bilangan disebut angka atau lambang bilangan, yang selanjutnya kita kenal dengan bilangan *natural*/bilangan asli. Dalam perkembangan matematika, konsep bilangan selama bertahun-tahun lamanya telah diperluas untuk meliputi bilangan nol, bilangan negatif, bilangan rasional, bilangan irasional, dan bilangan kompleks serta operasi bilangan tersebut.

Berdasar diagram 1 di bawah, untuk dapat mengenal bilangan bulat, mahasiswa dituntut mengenal bilangan asli, bilangan cacah, nol, bilangan bulat positif, dan bilangan bulat negatif. Bilangan sebagai suatu objek matematika yang abstrak akan menuntut pembelajar untuk menemukan cara membelajarkannya sehingga ketika mengajar bilangan tidak mendoktrin atau memaksakan hafalan dan prosedur tanpa pemberian makna.

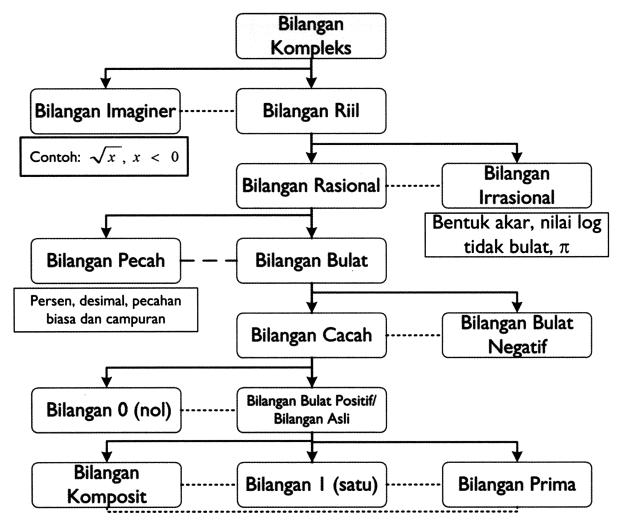



Diagram 1. Peta Konsep Bilangan

Pada umumnya, pembelajaran bilangan bulat di sekolah lebih mengedepankan hafalan, penerapan rumus, dan strategi menghitung. Peserta didik jarang sekali diminta untuk memahami makna bilangan bagi mereka. Akibatnya, siswa dipaksa untuk mengingat aturan dan algoritma yang melekat pada bilangan dan operasinya tanpa mengetahui alasannya. Apakah penggunaan alat peraga atau bahan manipulatif dapat membantu peserta didik memahami makna bilangan dan prosedur operasi bilangan? Apakah penggunaan masalah kontekstual dapat membantu peserta didik dalam memahami bilangan dan menemukan strategi komputasi? Berikut akan diberikan beberapa contoh aktivitas pembelajaran terkait topik pengenalan bilangan bulat, membandingkan, dan operasi bilangan.

2. Bilangan Bulat

2.1 Kesalahan Konsep

Kesalahan yang paling banyak dijumpai dalam pembelajaran tentang bilangan bulat dan operasinya adalah penggunaan istilah bilangan negatif dengan operasi pengurangan (operasi minus/operasi min). Konsep bilangan negatif dan konsep operasi minus (operasi pengurangan) adalah dua konsep yang sangat berbeda walaupun notasinya sama. Lebih parahnya, kesalahan pengucapan negatif menjadi 'min' digunakan untuk menjelaskan strategi/aturan/prosedur dalam menentukan hasil operasi bilangan, baik penjumlahan maupun pengurangan. Misalnya, untuk menjelaskan 3 – (-2) hasilnya 5, penjelasannya karena min (-) bertemu min(-) jadi plus (+) sehingga bisa ditulis 3 + 2 = 5.

2.2 Proses Pembelajaran

Berikut disajikan skenario pembelajaran yang bisa diterapkan dosen dalam aktivitas perkuliahan *micro-teaching* sebagai pembekalan kepada mahasiswa yang akan melaksanaan PPL atau dalam mata kuliah yang bertujuan memberikan contoh atau pengalaman langsung kepada mahasiswa tentang merancang skenario pembelajaran.

Merujuk pada pola umum skenario pembelajaran yang dijelaskan sebelumnya, skenario pembelajaran untuk topik 'Mengenal Bilangan Bulat, Menjumlahkan, dan Mengurangkan Bilangan Bulat' ini tergambar pada diagram berikut dengan petak-petak berwarna kuning.

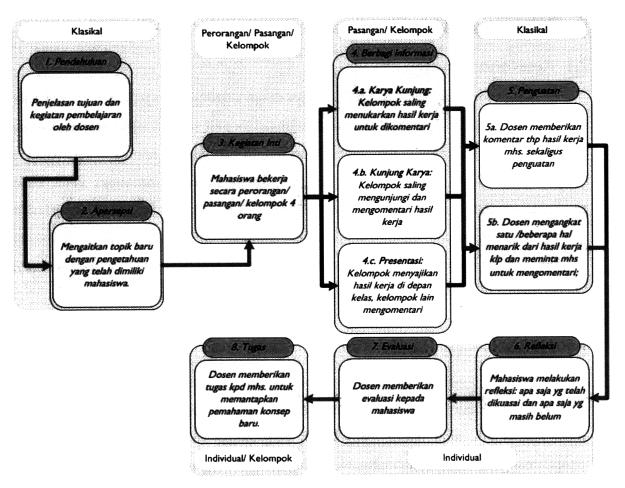



Diagram2. *Alur Pembelajaran 'Bilangan Bulat'*

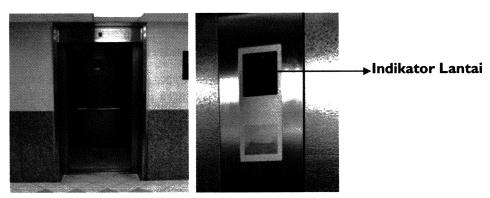
1. Pendahuluan

Dosen menyampaikan tujuan pembelajaran dan kegiatan yang akan dilakukan dalam perkuliahan, yaitu melalui penyelesaian masalah kontekstual.

a. Mahasiswa memahami makna bilangan, membandingkan, dan mengurutkan bilangan bulat.

b. Mahasiswa menemukan dan atau memilih strategi penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat.

2. Apersepsi

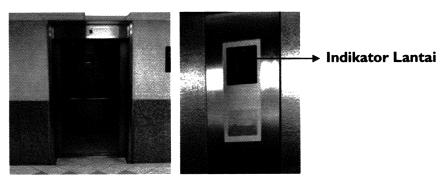
Mahasiswa dikenalkan atau diberi informasi terkait lift sebagai alat angkut manusia atau barang pada suatu bangunan bertingkat melalui penyajian gambar lift dan indikator dalam lift (perhatikan gambar 1)

Gambar 1. Lift dan Indikator Lantai

(Catatan: Konteks masalah disesuaikan dengan pengalaman riil/pengetahuan mahasiswa/siswa)

3. Kegiatan Inti

Aktivitas 1: Lift

- Pengajuan masalah kontekstual tentang penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat:

"Bu Indri bekerja di suatu gedung perkantoran yang mempunyai 40 lantai di atas lantai dasar (*ground floor*). Bangunan tersebut juga mempunyai 6 lantai bawah tanah (*underground*) sebagai tempat parkir. Lantai bawah tanah tersebut ditandai dengan bilangan negatif: dari -1 sampai -6. Sementara lantai dasar (*ground floor*) ditandai dengan 0 dan lantai di atasnya mempunyai nomor 1 sampai 40. Setiap kali lift melewati lantai gedung, lampu indikator berkedip dan bilangan indikator akan berganti sesuai lantainya. Bu Indri memarkir mobilnya di level -4 (lantai 4 di bawah lantai dasar) dan masuk lift."

Gambar 2. Lift dan Indikator Lift

- Mahasiswa diminta membuat visualisasi gambar sebagai representasi dari masalah yang harus diselesaikan oleh mahasiswa.

  (Tujuan: Mahasiswa membuat sketsa/gambar visual pergerakan lift atau garis lurus dengan penanda lantainya)

- Membuat negosiasi antarmahasiswa tentang cara menyederhanakan masalah tersebut menjadi bahasa yang lebih sederhana.

  (Tujuan: Mahasiswa melakukan simbolisasi bilangan sebagai representasi lantai. Misalnya lantai ground floor (G) sebagai angka nol, lantai 1 sebagai angka 1, lantai yang berada 1 lantai di bawah LG sebagai angka -1 dan menyatakan masalah kontekstual ke dalam bahasa matematika seperti operasi bilangan).

- Dengan menggunakan visualisasi dan hasil simbolisasi, mahasiswa diminta menyelesaikan masalah kontekstual yang diberikan.

  (Tujuan: Mahasiswa menggunakan garis lurus yang dilengkapi dengan bilangan hasil simbolisasi yang selanjutnya dikenal sebagai garis bilangan untuk digunakan sebagai model atau alat bantu strategi penyelesaian atau pengoperasian bilangan)

- Membahas berbagai strategi yang muncul dalam diskusi kelompok dan membandingkan berbagai strategi-strategi tersebut sehingga akan memperkaya pengetahuan mahasiswa tentang strategi-strategi dengan berbagai rasionalisasi.
- Mengulas kembali masalah kontekstual yang diberikan dan meminta mahasiswa untuk menyederhanakan permasalahan tersebut dengan menggunakan bahasa matematika/simbol.

  (Tujuan: Mahasiswa mampu mengubah masalah naratif kontekstual kedalam bahasa operasi penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat).

**** Detail aktivitas yang dilakukan mahasiswa dalam kelompok disajikan dalam Lembar Aktivitas (lampiran 1).***

4. Berbagi Informasi

Kelompok saling menukarkan hasil kerja untuk dikomentari. Komentar difokuskan pada:

- Apa makna bilangan?
- Bagaimana cara membandingkan dan mengurutkan bilangan bulat?
- Strategi apa yang digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut?
- Strategi mana yang paling singkat dan efektif?

5. Penguatan

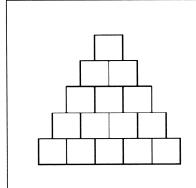
Dosen mengangkat satu/beberapa hal menarik dari hasil kerja kelompok dan meminta mahasiswa untuk mengomentari.

6. Refleksi

Mahasiswa melakukan refleksi berpandu pada pertanyaan:

- Apa saja yang mereka telah kuasai?
- Apa saja yang masih belum dipahami?

7. Evaluasi

Kegiatan ini dimaksudkan untuk mengetahui seberapa dalam mahasiswa memahami penjumlahan. Kembali pada pemecahan masalah, mahasiswa diminta mengerjakan tugas sebagai berikut:

Setiap kotak piramida di samping akan diisi dengan bilangan. Mula-mula yang harus diiisikan adalah kotak-kotak pada alas piramida .Kotak di atasnya diperoleh dari menjumlahkan bilangan-bilangan yang ada di dalam dua kotak di bawahnya. Andaikan dasar piramida hendak diisi bilangan-bilangan 7, 12, 5, 4, dan 9, berapakah nilai terbesar yang mungkin dari bilangan pada kotak teratas?

2.3 Asesmen

Cara untuk mengukur ketercapaian mahasiswa dalam mengembangkan pemahaman dan keterampilan komputasi tentang materi penjumlahan dan pengurangan dapat dilihat dari indikator ketercapaian berikut ini.

a. Mahasiswa menginterpretasi/memaknai bilangan sebagai suatu kuantitas atau ukuran terkait konteks yang digunakan.

b. Mahasiswa memaknai operasi bilangan sebagai suatu aktivitas menghitung banyaknya kuantitas atau besaran ukuran sebagai akibat dari suatu proses yang diterapkan.

c. Menemukan strategi komputasi/penghitungan menggunakan model/representasi gambar dari masalah yang diberikan.

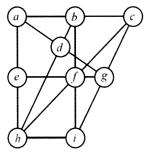
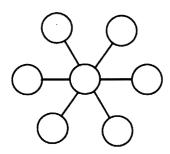
d. Menerapkan strategi untuk menghitung hasil operasi bilangan (penjumlahan dan pengurangan).

2.4 Contoh Soal Berpikir Tingkat Tinggi

Berikut disajikan soal-soal yang menuntut siswa/mahasiswa melakukan analisis, evaluasi, dan/atau kreasi dalam menyelesaikannya.

1. Empat belas angka dalam kartu kredit akan ditulis pada kotak-kotak berikut. Jika jumlah dari tiga angka berurutan adalah 22, tentukan nilai dari x?

			9				x				7		

2. Gantilah huruf-huruf pada gambar berikut dengan bilangan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9 sedemikian sehingga jumlah huruf-huruf yang terletak dalam satu garis lurus sama dengan 14.

3. Seluruh bilangan bulat antara 1 sampai 7 ditempatkan pada lingkaran di bawah ini sehingga jumlah 3 bilangan bulat yang terletak dalam satu garis memiliki jumlah yang sama dengan 3 bilangan bulat segaris lainnya. Ada berapa kemungkinan cara untuk mengisi lingkaran-lingkaran tersebut?

LAMPIRAN I

LEMBAR KERJA

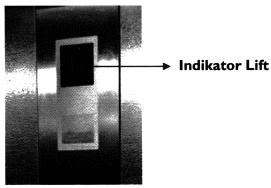
Petunjuk

1. ***Bacalah terlebih dahulu perintah/petunjuk secara cermat.***
2. ***Bacalah setiap informasi yang diberikan secara cermat.***
3. ***Jawablah setiap pertanyaan yang diberikan pada tempat yang disediakan secara jelas dan benar.***
4. ***Diskusikan** terlebih dahulu dengan teman dalam kelompok kalian sebelum menuliskan dalam lembar kerja.*

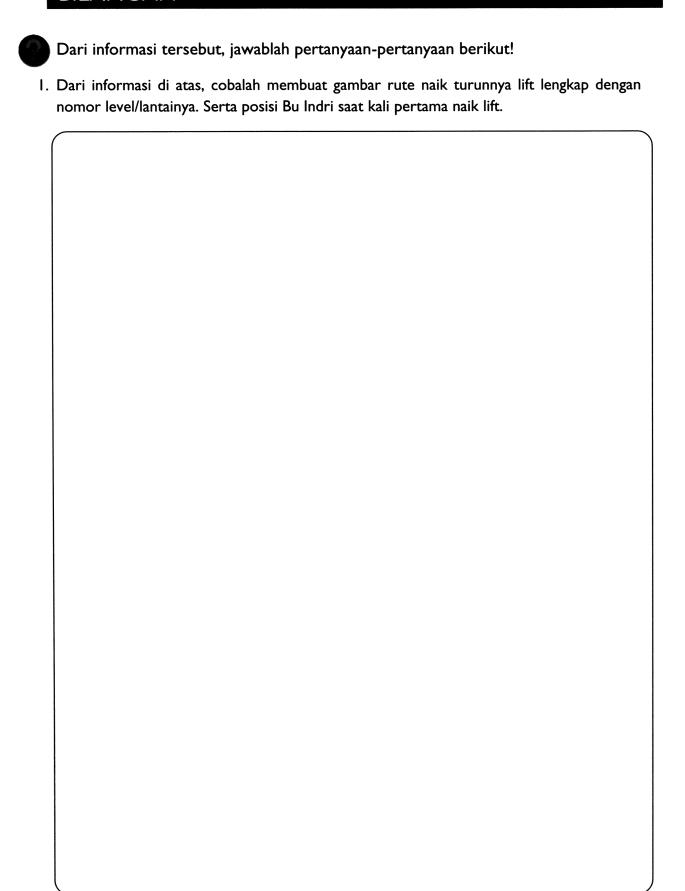
Kegiatan Belajar 1

Diskusi Kelompok

Bacalah informasi berikut:

Bu Indri bekerja di suatu gedung perkantoran yang mempunyai 40 lantai di atas lantai dasar (*ground floor*). Bangunan tersebut juga mempunyai 6 lantai bawah tanah (*underground*) sebagai tempat parkir. Lantai bawah tanah tersebut ditandai dengan bilangan negatif: dari -1 sampai -6. Sedangkan lantai dasar (*ground floor*) ditandai dengan 0, dan lantai di atasnya mempunyai nomor 1 sampai 40. Setiap kali lift melewati lantai gedung, lampu indikator berkedip dan bilangan indikator akan berganti sesuai lantainya. Bu Indri memarkir mobilnya di level -4 (lantai 4 di bawah lantai dasar) dan masuk lift.

Gambar 3. Lift dan Indikator Lift

Dari informasi tersebut, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut!

1. Dari informasi di atas, cobalah membuat gambar rute naik turunnya lift lengkap dengan nomor level/lantainya. Serta posisi Bu Indri saat kali pertama naik lift.

2. Berdasar informasi di atas, apa makna 20 dan -5 yang tertera pada tanda (indikator) lift?

3. Jika kalian bandingkan nomor yang muncul pada indikator lift, jika liftnya naik, bilangan yang muncul pada indikator lift makin besar atau makin kecil? Jelaskan mengapa?

4. Berdasar jawaban kalian pada nomor 3, manakah yang lebih besar 5 dan 7? Manakah yang lebih besar -1 dan -6?

5. Ketika Bu Indri menaiki lift, beberapa saat kemudian tiba-tiba lift mendadak berhenti. Kira-kira pada lantai berapa lift tersebut berhenti? Jika Bu Indri naik lift dari lantai tempat mobilnya di parkir, data yang diingat oleh Bu indri adalah lampu indikator berkedip sebanyak 12 kali, jelaskan cara/startegi kalian dalam menentukan jawabannya (bisa menggunakan gambar alur/rute pergerakan lift untuk menjelaskannya)!

6. Dari masalah pada soal nomor 5, bisakah masalah tersebut ditulis dalam kalimat yang lebih sederhana, misalkan dalam bentuk operasi bilangan? Jika **iya**, coba tuliskan bentuk operasinya!

7. Misalkan posisi Bu Indri ketika lift mati berada di lantai 24, sedangkan ruang kerjanya di lantai 37, Bu Indri harus melewati berapa lantai lagi dengan menaiki tangga darurat untuk sampai ke ruang kerjanya? Jelaskan cara/strategi kalian dalam menentukan jawabannya!

8. Dari masalah nomor 7, tuliskan masalah tersebut dalam betuk operasi bilangan?

9. Pada saat jam pulang kantor, Bu Indri mencoba menggunakan lift untuk turun menuju lantai tempat mobilnya diparkir. Setelah masuk ruang lift, pintu lift ditutup, namun ternyata lift tidak bergerak. Akhirnya lift terbuka kembali dan Bu Indri keluar dari ruang lift. Pada lantai berapa Bu Indri setelah keluar lift tersebut? Bagaimana cara menuliskannya dalam bentuk operasi bilangan?

10. Jika ruang kerja Bu Indri berada di lantai 37, sedangkan lantai tempat mobilnya diparkir adalah lantai -4, berapa lantai yang harus dilewati Bu Indri dengan menuruni tangga darurat?

11. Dari masalah pada soal nomor 7 dan 8, bisakah masalah tersebut ditulis dalam kalimat yang lebih sederhana, misalkan dalam bentuk operasi bilangan? Jika **iya**, coba tuliskan bentuk operasinya!

Kesimpulan

Berdasar aktivitas penyelesaian masalah sebelumnya, tuliskan temuan/hal-hal penting yang kalian dapatkan baik berupa cara/strategi penyelesaian, arti operasi penjumlahan, dan pengurangan.

3.Bilangan Berpangkat

3.1 Kesalahan Konsep (Miskonsepsi)

Kesalahan konsep yang biasa dijumpai pada siswa (dan mungkin juga pada mahasiswa) adalah sebagai berikut.

- $a^m = a.m$

  '$a$pangkat m' dipahami sebagai '$a$kali m'; yang benar'a pangkat m' sama dengan a dikalikan dengan dirinya sebanyak m kali.

- $a^m a^n = a^{mn}$

  'Hasil perkalian dua bilangan yang sama yang berpangkat' sama dengan'bilangan tersebut dengan pangkat hasil kali pangkat masing-masing'; yang benar pangkatnya dijumlahkan, bukan dikalikan.

- $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$

  'Penjumlahan dua bilangan akar' sama dengan 'akar dari penjumlahan dua bilangan tersebut; yang benar adalah '$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ '; disamakan dengan '$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{axb}$ '.

Kesalahan pemahaman tersebut diharapkan dapat dihindari atau teratasi, sebagian atau seluruhnya, dengan proses pembelajaran sebagai berikut.

3.2 Proses Pembelajaran

Berikut disajikan skenario pembelajaran yang bisa diterapkan dosen dalam aktivitas perkuliahan *micro-teaching* sebagai pembekalan kepada mahasiswa yang akan melaksanakan PPL atau dalam mata kuliah yang bertujuan memberikan contoh atau pengalaman langsung kepada mahasiswa tentang merancang skenario pembelajaran.

3.2.1 Bilangan Berpangkat

Proses pembelajaran'Bilangan Berpangkat' dapat dilaksanakan dengan alur pembelajaran sebagai berikut:

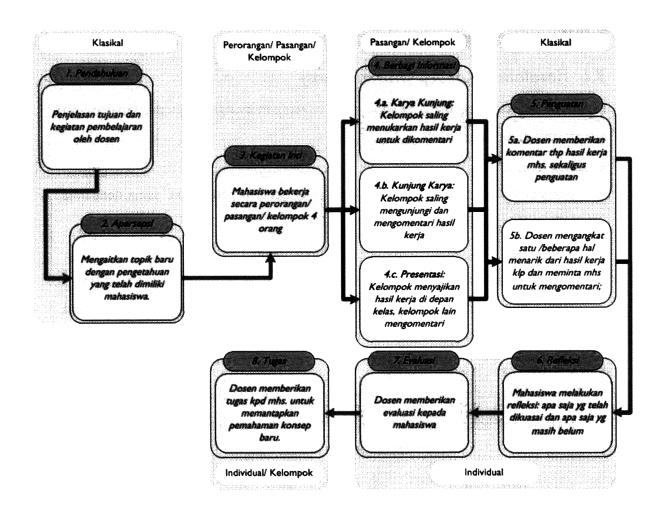



Diagram 3. Alur Pembelajaran 'Bilangan Berpangkat'

1. Pendahuluan

Dosen menjelaskan tujuan pembelajaran, yaitu:

a. Mahasiswa/siswa dapat menjelaskan makna bilangan berpangkat, yaitu a^m.

b. Mahasiswa/siswa dapat menentukan hasil perkalian bilangan berpangkat.

c. Mahasiswa/siswa dapat menjelaskan makna a^0 dengan $a \neq 0$ dan $a \in R$.

2. Apersepsi

Dosen/guru menggali pengetahuan/pengalaman mahasiswa/siswa terkait dengan bilangan berpangkat dengan mengajukan pertanyaan:

a. Apa makna 2^3? (Dua pangkat tiga).

b. Mana yang benar: $2^3 \times 2^2 = 2^5$ atau $2^3 \times 2^2 = 2^6$?

Beberapa jawaban mahasiswa/siswa yang berbeda dicatat di papan tulis/kertas plano dan harus terlihat dengan jelas oleh semua mahasiswa/siswa.

3. Kegiatan Inti

Kegiatan I

1) Secara **perorangan** mahasiswa diminta melakukan langkah-langkah sebagai berikut:

   Langkah 1: Melipat kertas HVS menjadi 2 bagian yang sama, buka lipatan, amati ada berapa bagian kertas yang terjadi?

   Langkah 2: Lipat kembali kertas tesrsebut sesuai bekas lipatan pada langkah 1 kemudian lipat lagi menjadi 2 bagian yang sama, buka lipatan semuanya, amati ada berapa bagian kertas yang terjadi?

   Langkah 3: Lipat kembali kertas tersebut sesuai bekas lipatan pada langkah 2 kemudian lipat lagi menjadi 2 bagian yang sama, buka lipatan semuanya, amati ada berapa bagian kertas yang terjadi?

   Langkah 4: Mengisi tabel berikut:

   Tabel 1. Hubungan antara aktivitas melipat dan banyaknya bagian yang terbentuk

Lipatan Ke-	Banyaknya Bagian yang Terbentuk
1	....
2	....
3	....
...	...

   Langkah 5: Memperkirakan berapa banyak bagian kertas yang terbentuk pada bekas lipatan ke-4, 5, dan 6; lipatan ke-10.

2) Secara **berpasangan** mahasiswa/siswa diminta untuk menuliskan 'banyaknya bagian yang terbentuk' dalam bentuk 'perkalian bilangan dua'.

3) Dosen/guru mengenalkan penulisan bilangan dalam bentuk 'pangkat', dalam hal ini:

   2 x 2 ------- ditulis sebagai 2^2 dibaca "Dua pangkat dua";

   2 x 2 x 2 ------ ditulis sebagai 2^3 dibaca "Dua pangkat tiga"

2 x 2 x 2 x 2 ------ ditulis sebagai 2^4 dibaca “Dua pangkat empat”

2 ------ ditulis sebagai 2^1 dibaca “Dua pangkat satu”

4) Guru/dosen menegaskan kembali bahwa:
   - 2^3 sama dengan 2 x 2 x 2, bukan 2 x 3.
   - 2^4 sama dengan 2 x 2 x 2 x 2, bukan 2 x 4.
   - dan sebagainya.
   - Bilangan 2 disebut ‘bilangan pokok’, bilangan 3 atau 4 disebut ‘bilangan pangkat’.

5) Setelah mahasiswa/siswa mengenal (kembali) penulisan bilangan berpangkat, ajukan pertanyaan:
   - Dapatkah Saudara menuliskan ’banyaknya bagian yang terbentuk’ pada tabel di langkah 4 dalam bentuk bilangan berpangkat?
   - Dapatkah sekarang menebak banyaknya bagian yang terjadi bila kerta dilipat 20 kali, 50 kali, dan 100 kali?

Kegiatan 2 (Kerja berpasangan)

1) Mahasiswa/siswa diminta untuk menyelesaikan perkalian berikut:

Tabel 2. Menyatakan perkalian dalam bentuk bilangan berpangkat

Perkalian	Hasil	Bentuk Bilangan Berpangkat	Perkalian Bil. Berpangkat
2 x 4 =	8	2^3	$2^1 \times 2^2$
4 x 8 =	32	2^5	$2^2 \times 2^3$
8 x 16 =	....	....	....
4 x 16 =	....	....	....
4 x 32 =	....	....	....

2) Mahasiswa/siswa diminta untuk mengamati bilangan-bilangan pada kolom 3 dan 4 kemudian menyimpulkan apa yang terjadi dengan 'pangkat' ketika dua bilangan berpangkat dikalikan.
3) Mahasiswa/siswa diminta untuk menyelidiki apakah kesimpulan tersebut berlaku bagi bilangan berpangkat dengan bilangan pokok yang lain, misalnya 3, 4, dan 5.

4. Berbagi Informasi (Karya Kunjung)

Mahasiswa/siswa diminta untuk saling berbagi cara dan hasil penyelesaian tugas dengan cara suatu pasangan datang ke pasangan lain secara bergantian menjelaskan cara dan hasil penyelesaian tugas, dan pasangan lainnya menanggapi.

5. Penguatan

Dosen/guru memberi penguatan, antara lain bahwa:

a. 2^3 sama dengan 2 x 2 x 2, yaitu perkalian 2 sebanyak 3 kali, bukan 2 x 3; atau secara umum $a^m = a\ x\ a\ x \ldots.$ sebanyak m kali; bukan $'a.m'$.

b. $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$; bukan 2^{2x3}; atau secara umum $a^m a^n = a^{m+n}$, bukan a^{mn}.

c. Memperkenalkan istilah bilangan berpangkat negatif. Melalui aktivitas mengamati dan mengisi tabel 3 berikut ini.

Tabel 3. Bilangan berpangkat negatif dan berpangkat nol

Bentuk perkalian bilangan	Perkalian dalam bentuk bilangan berpangkat	Penerapan konsep perkalian bilangan berpangkat
$16 = 4 \times 4$	$2^2 \times 2^2$	$2^{2+2} = 2^4 = 16$
$8 = 4 \times 2$	$2^2 \times 2^1$	$2^{2+1} = 2^3 = 8$
$4 = 4 \times 1$	$2^2 \times 2^{\cdots}$	$2^{2+\cdots} = 2^2 = 4$
$2 = 4 \times \ldots$	$2^2 \times 2^{-1}$	$2^{2+(-1)} = 2^1 = 2$
$\ldots = 4 \times \ldots$	$2^2 \times 2^{-2}$	$2^{2+(-2)} = 2^0 = \ldots$

Catatan untuk Dosen

Mahasiswa diminta berfokus pada pola pangkat pada bilangan kedua dari perkalian, hubungan antara bilangan berpangkat nol dengan 1 serta hubungan bilangan berpangkat negatif dengan konsep pembagian dan pecahan.

6. Refleksi

Secara perorangan mahasiswa/siswa diminta untuk menuliskan:

a. Apa saja yang sudah dikuasai.

b. Apa saja yang masih belum jelas.

c. Perasaan mereka sewaktu belajar.

7. Tugas

1. Jelaskan apa makna a^0 , dengan $a \neq 0$ dan $a \in R$?
2. Selidikilah hasil operasi pembagian sejumlah pasangan bilangan bentuk pagkat untuk kasus bilangan dengan pembagi mempunyai nilai pangkat yang lebih besar dari pada nilai pangkat bilangan yang dibagi, misalnya $2^3 : 2^4$.

Untuk tugas nomor 1 perlu tambahan informasi bagi mahasiswa, yaitu mereka diminta menyelidiki terlebih dahulu pembagian sejumlah pasangan bilangan berpangkat, misal $2^4 : 2^3$.

3.3 Contoh Soal Berpikir Tingkat Tinggi

Contoh masalah yang berkaitan dengan bilangan berpangkat dan bentuk akar.

1) Jika n genap dan a < 0 , berapakah hasil dari $\sqrt[n]{a}$?

   Jelaskan jawabanmu?

   Adakah pemikiran lain yang dapat kamu kemukakan yang berbeda dengan jawaban awal kamu?

2) Perhatikan dua bilangan berpangkat berikut 2^{175} dan 5^{75}. Jika dua bilangan tersebut dibandingkan, manakah yang nilainya lebih besar? Jelaskan alasannya!

3) Perhatikan bentuk perkalian berikut!

   $3^2 = 3 \times 3 = 9$ -------------------------------------- Memiliki satuan 9

   $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$-------------------------------- Memiliki satuan 7

   $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ --------------------------- Memiliki satuan 1

   $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$ -------------------- Memiliki satuan 3

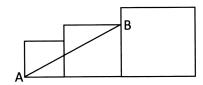
   $3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$---------------- Memiliki satuan 9

   $3^7 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2187$--------- Memiliki satuan 7

   ...

4) Berdasar data tersebut, bagaimana cara menentukan nilai satuan dari bentuk pangkat 3^{2013}? Bagaimana dengan nilai satuan dan pangkat 2013^{2013}?

5) Jika a dan b adalah bilangan bulat yang memenuhi persamaan $4a^2 + b^2 = 25$, tentukan ada berapa pasang (a,b) yang memenuhi persamaan tersebut!

6)

Pada gambar diatas terdapat 3 persegi yang berimpit, panjang sisi persegi berurutan berbeda 1 cm.

jika panjang ruas garis AB = $9\sqrt{2}$ cm, luas 5 persegi yang berurutan adalah ...

atau jika luas persegi pertama dan kedua adalah 41 cm^2, hitung luas 5 persegi yang berurutan!

4. Pola Bilangan

4.1 *Kesalahan pemahaman konsep*

Kesalahan yang paling banyak kita jumpai dalam pembelajaran tentangan pola bilangan adalah kesalahan dalam menentukan bentuk umum (pola umum) dari bilangan yang muncul sebagai akibat siswa tidak menggunakan semua informasi yang diberikan.

4.2 *Proses Pembelajaran*

Merujuk pada pola umum skenario pembelajaran yang dijelaskan pada bab II, skenario pembelajaran untuk topik 'Pola Bilangan' ini tergambar pada diagram berikut dengan petak-petak berwarna kuning.

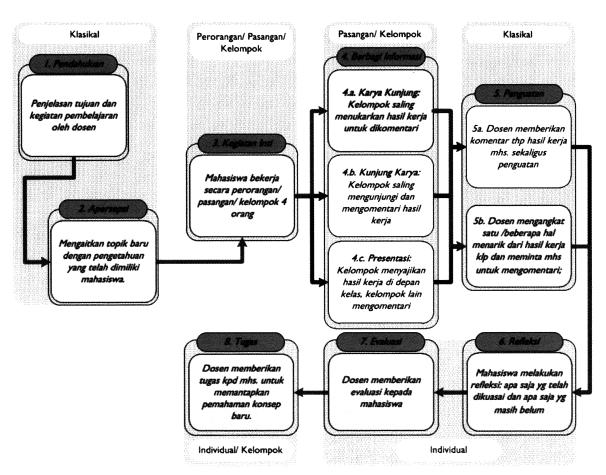



Diagram 4. *Skenario Pembelajaran 'Pola Bilangan'*

1. Pendahuluan

Dosen menyampaikan tujuan pembelajaran dan kegiatan yang akan dilakukan dalam perkuliahan, yaitu melalui penyelesaian masalah kontekstual:

a. Mahasiswa mampu menjelaskan alasan dalam memprediksi berbagai kemungkinan pola bilangan dan pola geometris berdasar data yang disediakan.

b. Mahasiswa mampu menyusun atau membuat pola bilangan dan pola geometris tertentu, memprediksi polanya, serta menjelaskan alasan logis yang dibuatnya.

2. Apersepsi

Dosen mengaitkankegiatan dengan pengalaman/pengetahuan yang telah dimiliki Mahasiswa dengan cara mengajak mahasiswa untuk mengkaji lagi konsep operasi bilangan bulat (penjumlahan, pengurangan, pembagian dan perkalian).

3. Kegiatan Inti

Aktivitas (Kerja Kelompok): *Display* Pemasaran Produk

- Aktivitas pembelajaran dimulai dengan pemberian masalah kontekstual terkait dengan studi kasus dalam penataan salah satu produk kemasan kaleng di suatu pertokoan sebagai berikut:

  "Bambang adalah seorang manajer pemasaran. Dia berencana menampilkan produk kemasan kaleng di satu sisi toko sehingga menyerupai bentuk pohon cemara (segitiga) seperti yang terlihat pada gambar di bawah ini:

Gambar 4. Kaleng produk kemasan dan gambar dinding salah satu pertokoan

Dari data yang ia dapatkan dari bagian konstruksi, bangunan menunjukkan bahwa ketinggian dinding toko tersebut adalah 6 meter (diukur dari lantai sampai plafon). Informasi yang tertera pada kemasan kaleng menunjukkan ketinggian satu kaleng adalah 10 cm. Agar ketinggian kaleng yang disusun berbentuk cemara mencapai setinggi dinding, berapa banyaknya produk kemasan kaleng yang diperlukan untuk disusun?

- Melalui diskusi kelompok, mahasiswa diminta mengidentifikasi informasi yang diperoleh dari kasus yang diberikan. Untuk membantu proses identifikasi, mahasiswa diminta menjawab pertanyaan berikut: Jika tinggi kaleng 10 cm, sedangkan tinggi dinding yang akan ditutupi tumpukan kaleng setinggi 6 meter (1 meter = 100 cm), berapakah banyaknya susunan (baris) kaleng sehingga puncak kaleng menyentuh plafon?

Tujuan: Mahasiswa menentukan banyaknya susunan (baris) yang diperlukan sedemikian sehingga kaleng mencapai plafon, yakni sebanyak 600/10 = 60 susunan(baris).

- Untuk membantu mahasiswa menentukan banyaknya kaleng yang diperlukan jika banyaknya baris (susunan kaleng) sebanyak yang didapat dari jawaban di atas, mahasiswa diminta melengkapi data tabel berikut:

Tabel 4. Data banyaknya baris dan banyaknya kaleng yang dibutuhkan

Visualisasi	Banyaknya baris	Banyaknya kaleng yang dibutuhkan
	1	1
	2	3
	3	6
	4	...
	5	...
	⋮	⋮
	10	...
	⋮	⋮
	25	...

Catatan untuk Dosen

Tujuan: Mahasiswa menentukan banyaknya kaleng dari setiap kasus yang diberikan. awalnya menggunakan gambar yang diberikan, kemudian menggunakan intuisi ketika gambar kaleng tidak disajikan, dan menduga untuk banyaknya baris semakin besar.

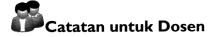
- Untuk membantu mahasiswa melengkapi tabel dan menyelesaikan masalah kontekstual yang diberikan di awal, mahasiswa diminta menjawab pertanyaan-pertanyaan berikut:
  - ✓ Apa hubungan antara bilangan pada kolom 'Banyaknya baris' dan bilangan pada kolom 'Banyaknya kaleng yang dibutuhkan'?
  - ✓ Apakah bilangan pada kolom 'Banyaknya kaleng yang dibutuhkan' bisa diperoleh dengan mengoperasikan (menjumlahkan, mengalikan, membagi dll) bilangan pada kolom 'Banyaknya baris' dengan suatu bilangan tertentu?
  - ✓ Jika ya, apakah aturan pengoperasian tersebut selalu berlaku untuk semua bilangan pada kolom 'Banyaknya kaleng yang dibutuhkan'?
  - ✓ Tuliskan hubungan bilangan tersebut!

Banyaknya baris	Banyaknya kaleng yang dibutuhkan
1	1 = 1
2	3 = 1+2
3	6 = 1+2+3
4	10 =...
5	...
⋮	⋮
10	...

Catatan untuk Dosen

Tujuan: Mahasiswa membuat hubungan/kaitan antara bilangan yang merepresentasikan banyaknya kaleng dan bilangan yang merepresentasikan banyaknya baris/susunan. Misalkan 1 = 1, 3 = 2 + 1, 6 = 3 + 2+ 1, 10 = 4 + 3 + 2 + 1.

- Berdasar pola yang ditemukan, berapakah banyaknya kaleng yang diperlukan oleh manajer pemasaran untuk menyusuannya dalam bentuk yang diinginkan?

Catatan untuk Dosen

Tujuan: Mahasiswa menggunakan pola bilangan yang didapat pada bahasan sebelumnya, yakni banyaknya kaleng yang disusun sebanyak 60 susunan adalah

$$60 + 59 + \ldots + 3 + 2 + 1 = (60+1) + (59+2) + (58+3) + \ldots + (31 + 30)$$

$$\underbrace{61 + 61 + \cdots + 61}_{30} = 30 \times 61 = 1830.$$

- Selanjutnya, mahasiswa/kelompok membuat suatu pola bilangan, dan meminta mahasiswa/kelompok lain untuk memprediksi/menemukan polanya dan menjelaskan alasan logisnya (saling tukar pola yang dirancang).

4. Berbagi Informasi

Kelompok saling menukarkan hasil kerja (karya kunjung) untuk dikomentari. Komentar difokuskan pada:

- Bagaimana cara menentukan kaitan antara dua bilangan tersebut?
- Strategi apa yang digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut?
- Setelah membandingkan berbagai strategi dari beberapa kelompok, strategi manakah yang paling jitu/mudah untuk digunakan?

5. Penguatan (Klasikal)

Dosen mengangkat satu/beberapa hal menarik dari hasil kerja kelompok, dan meminta mahasiswa untuk mengomentari.

6. Refleksi

Mahasiswa melakukan refleksi:

- Apa saja yang mereka telah kuasai.
- Apa saja yang masih belum dipahami.

7. Evaluasi

Kegiatan ini dimaksudkan untuk mengetahui seberapa jauh mahasiswa memahami pola bilangan. Kembali pada pemecahan masalah, mahasiswa diminta untuk mengerjakan tugas sebagai berikut:

Selembar kertas dilipat menjadi dua bagian yang sama, kemudian dilipat lagi sampai 4 kali seperti tampak pada tabel berikut:

Banyak lipatan	1	2	3	4	...	...
Banyak daerah	2	4	8	16	...	...

a. Pada lipatan keenam, ada berapa daerah yang terjadi?
b. Untuk mendapatkan 500 daerah, perkiraan berapa lipatan yang dilakukan? Mengapa?

8. Tugas

Dosen memberikan tugas kepada mahasiswa secara perorangan terkait dengan pola bilangan, misalnya penemuan bilangan kuadrat, 'bilangan segitiga', dan 'bilangan persegi panjang'

4.3 Assesmen

Untuk mengukur ketercapaian mahasiswa dalam mengembangkan pemahaman dan *skill* (komputasi) tentang materi pola bilangan, hal itu dapat dilihat dari indikator ketercapaian berikut ini.

a. Menjelaskan alasan dalam memprediksi berbagai kemungkinan pola bilangan dan pola geometris berdasar data yang disediakan.

b. Menyusun atau membuat pola bilangan dan pola geometris tertentu, memprediksi polanya dan menjelaskan alasan logis yang dibuatnya.

4.4 Contoh Soal Berpikir Tingkat Tinggi

Berikut disajikan soal-soal yang menuntut siswa/mahasiswa melakukan analisis, evaluasi, dan/atau kreasi dalam menyelesaikannya.

1. Perhatikan pola bilangan berikut:

$$1 + 2 = 3$$

$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

(Bilangan terakhir pad baris ke 3 adalah 15)

Jika pola tersebut dilanjutkan,
apa bilangan terakhir pada baris ke-5?
apa bilangan terakhir pada baris ke-100?

2. Perhatikan pola bilangan berikut.

$$1 = 1$$
$$2 + 3 + 4 = 1 + 8$$
$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 8 + 27$$
$$10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 27 + 64$$

Jika bilangan pertama pada baris ke-4 adalah 10, bilangan pertama pada baris ke-2013 adalah...

3. Spiral bilangan dibentuk seperti pada gambar yang dimulai dengan 1. Jika pola pada spiral dilanjutkan, bilangan yang berada tepat di sebelah kanan bilangan 529 adalah...

```
       10 → 11 → 12 → 13
       ↑              ↓
       9    2 →  3    14
       ↑    ↑    ↓    ↓
  :    8    1    4    15
  ↑    ↑         ↓    ↓
  22   7 ←  6 ←  5    16
  ↑                   ↓
  21 ← 20 ← 19 ← 18 ← 17
```

5. Berbagai Gagasan Pembelajaran

5.1. Topik: **Bilangan Pecahan**

Mewarnai Tongkat Mini

Misalkan kamu mempunyai beberapa tongkat mini yang berukuran sama. Kreasi mewarnai tongkat tersebut dilakukan dengan membagi tongkat itu menjadi beberapa bagian yang sama dengan berbagai warna sehingga lebih menarik untuk dilihat.

Tujuan Pembelajaran: Memunculkan istilah dan simbol bilangan pecahan (pendahuluan tentang pecahan).

Membagi tongkat menjadi dua bagian dengan panjang sama.

Tongkat mini sebelum dipartisi (dibagi):

Tongkat mini setelah dipartisi (dibagi) menjadi 2 bagian sama:

Berapa ukuran satu bagiannya?

Membagi tongkat menjadi empat bagian dengan panjang sama.

Berapa ukuran satu bagiannya?

Membagi tongkat menjadi delapan bagian dengan panjang sama.

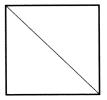
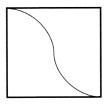
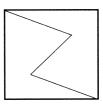
Berapa ukuran satu bagiannya?

Menentukan ukuran dari bagian-bagian dari tongkat yang diwarnai.

Bagian	Ukuran
	Satu bagian, separuh, setengah, 1 dari 2 bagian,

Bagian	Ukuran

Membagi Dua Sama Besar sebuah Persegi (1/2 = setengah)

Berbagai cara membagi dua sama besar sebuah persegi sebagai berikut:

- Apakah ada cara lain? (Perlu bantuan kertas bertitik)
- Gambarkan semua cara membagi dua sama besar pada satu persegi, apa yang dapat Saudara amati?

Berapa Bagiankah?

Bila keseluruhan persegi sama dengan 1 dan sisi miring segitiga menghubungkan titik tengah sisi persegi yang berdekatan, berapa bagian yang diarsir?

Perbandingan dan Ekuivalensi Bilangan Pecahan

Dari beberapa tongkat mini yang dibagi dan diwarnai dengan berbagai variasi bagian dan warna, bandingkan panjang ukuran bagian-bagiannya, apakah ada nilai ukuran panjang bagian yang sama?

Membandingkan Ukuran bagian tongkat dengan berbagai tongkat dengan bagian berbeda

Bandingkan ukuran bagian tongkat dan buatlah hubungan dari ukuran tongkat tersebut

Lanjutkan memwarnai tongkat dengan bagian lebih bervariasi. Buat hubungan antar nilai ukuran bagian-bagiannya. Lihat pola kesamaan dan ketaksamaan yang didapat

$\frac{1}{2} = 2/4 = 4/8 = \ldots$

$1/3 = 2/6 = 3/9 = \ldots$

$\frac{1}{4} < 1/3 < \frac{1}{2}$

Menjumlahkan dan Mengurangkan Bilangan Pecahan dengan Penyebut Sama

Menggunakan tongkat mini yang yang kalian bagi (partisi) dan warnai. Kalian diminta mengukur hasil penjumlahan bagian-bagian dari tongkat mini tersebut.

Menentukan panjang bagian dari tongkat sebagai hasil penambahan atau pengurangan bagian-bagiannya.

Penambahan Bagian	Kalimat matematika
ditambah Satu Tongkat utuh:	
ditambah Satu Tongkat utuh:	

Bagaimana menjumlahkan bilangan 1/3 dan 2/3, 1/5 dan 3/5?

Bagaimana cara menjumlahkan bilangan pecahan yang memiliki penyebut sama?

Perkalian Bilangan Pecahan dengan Bilangan Bulat

Jika Saudara punya tali dengan ukuran 12 meter, berapa meter ukuran dari 1/3 bagian dan ¼ bagian dari tali tersebut?

Melipat 2 tali berukuran 12 meter menjadi 3 bagian dan 4 bagian yang sama.

Bagian	dari 12

Menentukan hasil perkalian bilangan pecahan dengan bilangan bulat dengan menentukan panjang bagian dari yang diinginkan.

Menjumlahkan Bilangan Pecahan dengan Penyebut Berbeda - Pemecahan Masalah

Seorang pembalap mengikuti balapan sepeda. Pada saat balapan, hujan turun sangat deras. Setelah mengayuh sepedanya dengan jarak sekitar 2/3 bagian lintasan seluruhnya dengan kecepatan tinggi, seorang pembalap terjatuh karena jalanan licin. Kemudian dia melanjutkan kembali. Namun, setelah menempuh ¼ bagian lintasan seluruhnya (bukan sisa lintasan), dia terjatuh lagi dan tidak bisa melanjutkan karena sepedanya rusak berat.

Berapa total panjang lintasan yang sudah ditempuh pemabalap sampai dia tidak bisa melanjutkan balapannya?

Karena tidak ada informasi tentang jarak lintasan seluruhnya, kamu bebas menetapkan kira-kira jaraknya berapa sehingga bisa lebih mudah mengitungnya. Kira-kira berapan panjang lintasan yang sesuai?

Dugaan proses berpikir siswa:

Bagaimana menentukan panjang lintasan yang berhasil dilalui dalam bentuk pecahan?

Dugaan proses berpikir siswa:

Bagaimana menjumlahkan bilangan pecahan dengan penyebut berbeda?

5.2. Topik: **Strategi Perkalian Bilangan Bulat**

Menghitung Cepat

Perhatikan pola perkalian bilangan berikut:

Setiap 4 x 25 = 100 → 48 x 25 = (12 x 4) x 25 = 12 x (4 x 25) = 12 x 100 = 1200
Setiap 8 x 125 = 1000 → 32 x 125 = (4 x 8) x 125 = 4 x (8 x 125) = 4 x 1000 = 4000

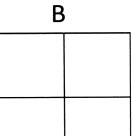
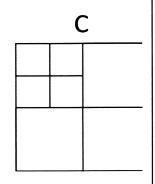
Gunakan pola perkalian tersebut untuk menentukan hasil:

a. 36 x 25
b. 56 x 125
c. 25 x 125 x 44 x 96

5.3. Topik: **Pola Bilangan**

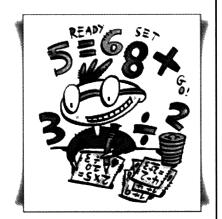
Membagi Suatu Bangun

Persegi pada gambar A dapat dibagi menjadi 4 persegi yang lebih kecil seperti pada gambar B atau dapat diubah menjadi 7 persegi (3 besar dan 4 kecil) seperti pada gambar C. Ubah bangun persegi pada gambar A menjadi 6 persegi lainnya.

A B C

Kegiatan dapat dilakukan secara bertahap, misalnya:

1. Pada persegi 2x2 petak dapat dibuat berapa persegi lain? (untuk 1x1)
2. Pada persegi 3x3 petak dapat dibuat berapa persegi lain? (untuk 1x1 dan 2x2)
3. Pada persegi 4x4 petak dapat dibuat berapa persegi lain? (untuk 1x1, 2x2, 3x3)

Lomba Matematika

Pada seleksi babak pertama olimpiade matematika, setiap peserta wajib mengerjakan minimal 20 soal di antara 25 butir soal yang diberikan.
Setiap jawaban yang benar diberi skor 4, jawaban salah diberi skor -1 dan tidak dikerjakan diberi skor 0. Peserta yang lolos babak pertama mempunyai skor minimal 78.
Untuk memenuhi skor minimal tersebut, ada berapa susunan jawaban benar, salah, dan tidak dikerjakan?

Merancang Suatu Bangun

Bangun dibawah ini disusun dari batang korek api.

Bangun ke:	Banyak batang korek api
1	4
2	12
3	24

a. Tentukan banyaknya batang korek api pada bangun ke-4!
b. Untuk merancang bangun pada pola ke 10, tentukan berapa batang korek api yang diperlukan!

Informasi Tambahan (Bila diperlukan):

Bangun ke:	Banyak batang korek api	
1	4	= 1 x 4
2	12	= 3 x 4
3	24	= 6 x 4

<u>Pertama</u>

1 = 1

3 = 1 + 2

6 = 1 + 2 + 3

10 = 1 + 2 + 3 + 4

<u>Ke Dua</u>

$D_n = n\,(S_1 + S_n)/2$

(D_n = jumlah n suku; S_1 = Suku ke 1; S_n = Suku ke n)

Menemukan Pola Bilangan

Bilangan 15 dapat dinyatakan dalam bentuk penjumlahan 2 atau lebih bilangan asli berurutan sebagai berikut:

$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
$15 = 4 + 5 + 6$
$15 = 7 + 8$

Untuk bilangan Asli kurang dari 1000, ada berapa bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk penjumlahan 2 atau lebih bilangan asli berurutan ?

Bilangan Berpangkat

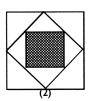
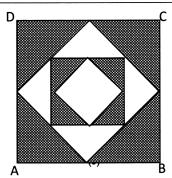
Perhatikan pola bilangan berikut:

$$1 \rightarrow 1$$
$$3 \quad 5 \rightarrow 3 + 5 = 8$$
$$7 \quad 9 \quad 11 \rightarrow 7 + 9 + 11 = 27$$
$$13 \quad 15 \quad 17 \quad 19 \rightarrow 13 + 15 + 17 + 19 = 64$$

Dengan mengamati banyaknya bilangan ganjil dan jumlahnya pada tiap baris, tentukan penjumlahan bilangan ganjil berurutan yang jumlahnya 1331!

MENGHITUNG LUAS DENGAN KONSEP PECAHAN

Berapa Bagiankah?

Jika empat titik sudut persegi yang diarsir terletak di tengah-tengah sisi persegi luar dan luas daerah persegi luar sama dengan 1 bagian, berapakah luas daerah persegi yang diarsir tersebut?

Jika gambar (1) diteruskan dengan cara yang sama, berapakah luas daerah persegi yang diarsir?

Gambar (3) dibuat dengan cara yang sama dengan gambar (1) dan (2).

Jika luas persegi ABCD adalah 576 cm^2, berapakah luas daerah yang diarsir?

Meramal Hari Keberuntungan

Ani bermimpi bertemu seorang peramal hebat dari Negeri Cina. Ia mengatakan bahwa 100 hari setelah hari Sabtu pada 6 Maret 2005 ia akan menemukan hari keberuntungannya. Bantulah Ani menemukan hari apakah hari keberuntungannya? Mari kita sama-sama coba membantu Ani, mula-mula kita buat susunan seperti ini:

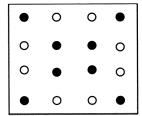
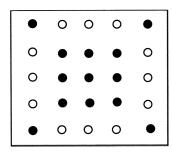
HARI 1 : MINGGU	HARI 8 : MINGGU	HARI 15: MINGGU
HARI 2 : SENIN	HARI 9 : SENIN	HARI 16: SENIN
HARI 3 : SELASA	HARI 10: SELASA	dst ....
HARI 4 : RABU	HARI 11: RABU	
HARI 5 : KAMIS	HARI 12: KAMIS	
HARI 6 : JUMAT	HARI 13: JUMAT	
HARI 7 : SABTU	HARI 14: SABTU	

Coba cermati susunan hari di atas, hari Sabtu jatuh pada bilangan berapa saja?

Apakah ada persamaan bilangan pada hari Sabtu?

Bagaimanakah polanya? Nah, sekarang apakah kalian sudah bisa membantu Ani untuk menentukan hari keberuntungannya ?

Membuat Desain Dinding

Pak Ali berencana mendesain dinding rumahnya dengan motif seperti berikut:

Untuk memenuhi seluruh dinding di rumahnya, ia ingin membuat desain seperti di atas sampai kotak keseratus. Bantulah Pak Ali menemukan banyaknya bulatan hitam yang diperlukan untuk desain keseratus!

Kotak ke ...	Total Bulatan Hitam	Bulatan Hitam Tengah
1	4	0
2	5	1
3	8	4
4	13	9
5	....	......
6	....	......
....	....	......
100	....	......

- Berapakah banyaknya bulatan hitam pada kotak ke-5 dan ke-6?
- Coba tentukan banyaknya bulatan hitam yang ada ditengah kotak ke-5 dan ke-6!
- Bagaimana dengan bulatan hitam yang ada di pojok?
- Dapatkah kalian menentukan pola banyaknya bulatan hitam pada setiap kotak?
- Nah, apakah sekarang kalian sudah bisa membantu Pak Ali menentukan banyaknya bulatan hitam pada desain kotak keseratus?

Misteri Pecahan Pembilang Ganjil Bersaudara

Perhatikan bentuk penjumlahan bilangan berikut:

$$\frac{1}{3x5}+\frac{1}{5x7}+\frac{1}{7x9}+\cdots\dots\dots\dots+\frac{1}{95x97}+\frac{1}{97x99}$$

Berapakah hasil penjumlahan bilangan di atas?

Bagaimana cara kalian menemukan?

Apakah ada pola tertentu yang bisa kalian gunakan?

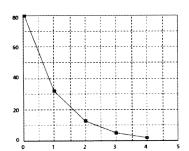
Coba pikirkan apakah bentuk $\frac{1}{3x5}$ dapat diubah menjadi bentuk yang lain?

Coba pikirkan apakah bentuk $\frac{1}{5x7}$ dapat diubah menjadi bentuk yang lain?

Bagaimana hubungan $\frac{1}{5x7}$ dengan $\frac{1}{3x5}$ setelah Anda ubah bentuknya?

Nelayan Pencari Ikan

Hamzah tinggal di pinggir pantai. Ia biasa mencari ikan dengan menggunakan perahu layarnya. Beberapa jenis ikan yang diperolehnya biasanya bergantung pada musim atau bulan. Sekali waktu nelayan bisa memperoleh kepiting, udang, ikan kakap, atau ikan bawal. Di pelelangan ikan diketahui bahwa satu takar udang dapat ditukar dengan dua takar kepiting. Informasi lain menyebutkan bahwa satu takar kepiting dapat ditukar dengan tiga ekor ikan bawal. Sementara empat ekor ikan bawal bisa ditukar dengan satu ekor ikan KAKAP.

1. Manakah yang lebih mahal. Satu takar udang atau sati ekor kakap? Mengapa?
2. Andaikan Amir akan menukar 6 ekor kakap dengan udang, berapa takar udang yang diperolehnya?
3. Tuliskan kembali dan gambarkan informasi di atas sedemikian sehingga mudah digunakan?

ALJABAR

I. Pengantar

Aljabar (*algebra*) adalah cabang matematika yang mempelajari struktur, hubungan, dan kuantitas. **Aljabar** berasal dari bahasa Arab "al-jabr" yang berarti "pertemuan", "hubungan", atau "penyelesaian" adalah cabang matematika yang dapat dicirikan sebagai generalisasi dari bidang aritmatika. Di dalam aljabar, kita tidak bekerja secara langsung dengan bilangan, melainkan bekerja dengan menggunakan simbol, variabel, dan elemen-elemen himpunan. Sebagai contoh "penambahan" dan "perkalian" dipandang sebagai operasi secara umum dan definisi ini menuju pada struktur bilangan seperti grup, ring, dan medan (*fields*) sebagaimana yang dipelajari mahasiswa ketika mempelajari struktur aljabar.

Guna mempelajari hal-hal ini, dalam aljabar digunakan simbol (biasanya berupa huruf) untuk merepresentasikan bilangan secara umum sebagai sarana penyederhanaan dan alat bantu memecahkan masalah. Misalnya, x mewakili bilangan yang diketahui dan y bilangan yang ingin diketahui. Karena itu, dalam penggunaannya, jika Amir mempunyai uang ***x*** rupiah dan kemudian Rahmi mempunyai uang 500 rupiah lebih banyak daripada uang Amir, uang Rahmi dapat ditulis dalam bentuk $y = x + 500$.

Pemahaman terhadap konsep-konsep aljabar memiliki pemanfaatan dalam kehidupan sehari-hari atau untuk kemudahan dalam memahami matematika tingkat selanjutnya yang lebih tinggi, pelajaran atau bidang ilmu lain yang didasari pada konsep aljabar. Beberapa pemanfaatan konsep-konsep tersebut disebutkan di bawah ini.

- Pemanfaatan dalam kehidupan sehari-hari.

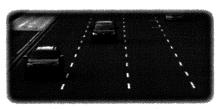
  Penyederhanaan permasalahan dan efisiensi prosedural dalam penyelesaian masalah nyata.

Contoh:

Di rumah, ibu kita biasa membuat kue. Suatu saat ibu membuat dua jenis kue. Sebanyak 24 kg gula yang dimiliki ibu dijadikan sebagai bahan untuk membuat dua jenis kue tersebut, yakni masing-masing 2 kg untuk kue pertama dan 5 kg untuk kue kedua. <u>Permasalahan:</u> Ibu ingin menentukan banyaknya kue pertama dan kue kedua yang bisa dibuat dari komposisi persediaan gula yang demikian.

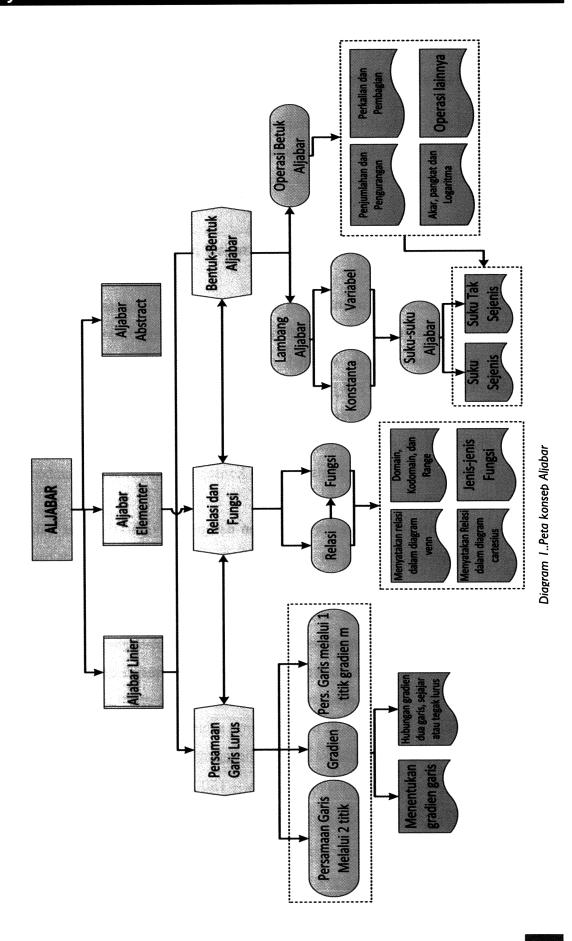
Gambar 1. Kue-kue

Permasalahan di atas akan mudah diselesaikan jika disederhanakan dalam bentuk model matematika dengan melibatkan simbol-simbol tertentu, yang kelak akan diberi nama sebagai **variabel**. Dapat dimisalkan bahwa kue pertama yang dibuat Bu Ani adalah **x** dan kue kedua adalah **y**. Kemudian situasi komposisi gula yang dibutuhkan untuk membuat dua kue tersebut dimodelkan menjadi $2x + 5y = 24$. Tentu, Anda dapat menghitung dengan mudah berapa potong kue kedua yang diperoleh jika kue pertama yang dibuat adalah 7 potong.

- Pemanfaatan dalam bidang ilmu lain

Gambar 2. Mobil melaju di jalan raya

Dalam bidang fisika dipelajari tentang kecepatan (v) sebuah benda yang bergerak dalam lintasan lurus beraturan yang besarnya kecepatan suatu benda yang bergerak lurus beraturan adalah perbandingan antara jarak tempuh (s) dan waktu tempuh benda tersebut (t). Konteks fisika ini dapat disederhanakan dalam bentuk model matematika: $v = \frac{s}{t}$. Dengan model ini dapat ditentukan besarnya kecepatan mobil pada saat melaju 10 meter setelah 2 detik.

Aljabar yang dipelajari dalam matematika sekolah dikelompokkan dalam tiga kelompok materi, yaitu aljabar elementer, aljabar linier, dan aljabar abstrak. Berikut ini digambarkan peta konsep dasar dalam aljabar yang dipelajari dalam matematika sekolah.

Diagram 1..Peta konsep Aljabar

2. Bentuk-Bentuk Aljabar

2.1 Kesalahan Pemahaman Konsep

Berdasar pengalaman beberapa guru yang terlibat dalam penulisan buku ini, masih ditemukan beberapa bentuk kesalahan konsepsi yang biasa terjadi ketika siswa telah mempelajari materi bentuk-bentuk aljabar, antara lain:

1) Kesalahan mengidentifikasi variabel

Kesalahan mengidentifikasi variabel terjadi pada situasi yang dicontohkan berikut ini.

Siswa ditugaskan memberikan contoh tentang variabel terkait kehidupan sehari-hari. Siswa menyebutkan: "*Budi mempunyai 3 biji mangga dan 4 biji jeruk*".

Untuk menentukan variabel pada situasi tersebut, siswa membuat model matematika: *3 m + 4 j (**m**: simbol untuk mangga, **j**: simbol untuk jeruk)*. Kemudian siswa menyebutkan variabelnya adalah ***m*** dan ***j***.

Konsepsi siswa yang demikian merupakan kesalahan konsepsi tentang variabel. Variabel yang dimaksud siswa dalam konsepsi demikian adalah *lambang atau notasi huruf dari suatu pemodelan*.

2) Kesalahan konsepsi tentang koefisien dan prinsip operasi aljabar dalam prosedur menyelesaikan operasi $\mathbf{3a + 2b}$ *disederhanakan menjadi* $\mathbf{5ab}$. Pada bagian lain siswa menyelesaikan suatu persamaan $\mathbf{4 - 3b = 2}$ dengan menyatakan $\mathbf{4 - 3b = b}$, sehingga menuliskan $b = 2$.

3) Kesalahan ***memodelkan*** secara aljabar dari suatu masalah-masalah nyata.

Sebagai contoh, *"Adikku memiliki uang 1500 lebih sedikit dibandingkan dua kali dari uang aku"*. Masalah nyata seperti ini sering dijumpai dalam percakapan sehari, namun sebagian siswa masih sulit memahaminya sehingga sulit menyederhanakannya dalam bentuk model matematika dengan menggunakan bentuk-bentuk aljabar. Kesalahan pemodelan tersebut misalnya $x < 2y - 1500$.

Pertanyaan untuk didiskusikan

Jelaskan bagaimana pemahaman yang benar sesuai konsep yang sebenarnya pada tiga bentuk kesalahan pemahaman konsep di atas!

2.2 Proses Pembelajaran

Untuk merancang kegiatan pembelajaran operasi bentuk aljabar, perlu dirancang lintasan pembelajaran yang akan menjadi panduan pengajar mengembangkan aktivitas pembelajaran. Tahapan aktivitas pembelajaran 'Bentuk Aljabar' dilaksanakan sebagaimana terlihat pada alur berikut (petak kuning).

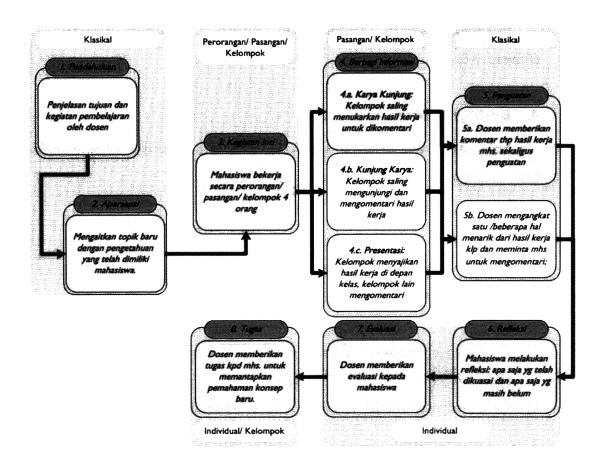



Diagram 2. Alur Pembelajaran 'Bentuk-bentuk Aljabar'

1. Pendahuluan

Dosen menyampaikan tujuan pembelajaran, yaitu mahasiswa mampu:

a) memahami fakta-fakta matematika yang berkaitan bentuk-bentuk aljabar,
b) mengonstruksi pemahaman tentang konsep-konsep yang terkait dalam operasi hitung aljabar, dan
c) memecahkan masalah matematika yang berkaitan bentuk-bentuk aljabar.

2. Apersepsi

Dosen menggali informasi tentang kemampuan mahaiswa terkait dengan konstanta, variabel, dan koefisien.

3. Kegiatan Inti

Mahasiswa secara berkelompok diminta melakukan aktivitas 1-8 (lihat aktivitas 1-8).

4. Berbagi Informasi

Mahasiswa saling bertukar hasil kerja antarkelompok dan saling memberi umpan balik secara tertulis pada kertas terpisah.

5. Penguatan

Dosen memberi penegasan tentang:

a) Perbedaan antara variabel dan konstanta.
b) Cara menuliskan lambang yang menunjukkan variabel, konstanta, atau koefisien.
c) Cara mengelompokkan dan menyederhanakan suku-suku sejenis dari suatu bentuk aljabar.
d) Cara menyusun model matematika bentuk-bentuk aljabar dari suatu masalah nyata.

6. Refleksi

Mahasiswa menulis

- Apa saja yang sudah dikuasai.
- Apa saja yang belum dipahami.

7. Evaluasi

Mahasiswa melaksanakan aktivitas 9 (lihat aktivitas 9).

Aktivitas I. Memperkenalkan Lambang dan Lambang Aljabar

Belajar aljabar adalah belajar bahasa lambang dan operasi atau relasinya. Karena itu, siswa perlu memahami dengan baik arti lambang aljabar sebelum belajar tentang operasi dan relasi pada aljabar. Untuk memahami arti lambang aljabar, terlebih dahulu perlu diketahui tentang arti lambang.

Untuk memahami arti lambang, siswa dapat diberi permasalahan kontekstual yang relevan.

Perhatikan deretan rumah di sekitar rumah kalian. Anda tentu melihat ada rumah besar, ada rumah kecil. Masing-masing rumah memiliki nomor rumah.

Apakah nomor rumah ini dapat dikatakan sebagai lambang dari rumah ini? Jika ya, mengapa? Apa yang diwakili oleh nomor rumah ini? Jika tidak, apa alasannya?

Lambang aljabar adalah suatu tempat bagi bilangan-bilangan atau lambang yang mewakili bilangan-bilangan. Pada sembarang lambang aljabar dapat diberikan nilai tertentu sesuai persyaratan yang dikehendaki. Lambang bilangan tidak termasuk lambang aljabar. Angka 2 melambangkan bilangan yang nilainya 2.

Pada kegiatan pembelajaran ini dapat diperkenalkan kesepakatan dasar dalam penulisan lambang aljabar. Operasi atau relasi pada lambang-lambang aljabar mengikuti aturan-aturan tertentu. Beberapa kesepakatan dasar penulisan lambang aljabar sebagai berikut.

- Tanda operasi "kali" tidak ditulis sebagaimana operasi "tambah" dan lambang-lambang yang ditulis berdekatan diartikan sebagai perkalian. Contohnya adalah $a + a = 2.a$ ditulis $2a.2a$ dapat diartikan "$2 \ x \ a$".
- $\boldsymbol{a^2}$berarti $\boldsymbol{a \ x \ a}$ atau $\boldsymbol{a.a}$ dan dapat ditulis $\boldsymbol{aa}$.
- $\boldsymbol{a^2a^3}$ berarti $\boldsymbol{a^2 \ x \ a^3}$ atau $(\boldsymbol{a.a}) \ x \ (\boldsymbol{a.a.a})$ dan dapat ditulis $(\boldsymbol{aa \ x \ aaa})$ atau dengan menerapkan pengetahuan tentang menyederhanakan bentuk pangkat, $\boldsymbol{a^2a^3}$ dapat ditulis $\boldsymbol{a^5}$.

Aktivitas 2. Mengonstruksi Pemahaman Variabel dan Konstanta

Salah satu lambang aljabar diberi istilah variabel aljabar. Sebelum memahami istilah variabel aljabar, siswa perlu memahami arti variabel. Dalam matematika variabel aljabar cukup disebut sebagai variabel.

Untuk memahami makna variabel, siswa dapat diberi permasalahan kontekstual tentang variabel.

Ayah menjual bermacam-macam buah. Buah yang dijualnya dikelompokkan menurut jenisnya. Ada apel, jeruk, semangka, dan lainnya.

Gambar 3. Buah-buahan

a. *Apakah nama buah yang dijual oleh Ayah dapat diwakili oleh suatu lambang tertentu? Jika ya, kemukakan paling sedikit 4 contoh lambang yang dapat digunakan.*
b. *Apakah himpunan semesta dari lambang-lambang itu?*
c. *Pilih satu lambang, kemudian sebutkan nama buah apa saja yang diwakili oleh lambang itu.*
d. *Tahukah Anda istilah yang cocok untuk menyebut nama lambang yang Anda pilih itu?*

Aktivitas 3. Memahami Pentingnya "Melambangkan Variabel"

Mahasiswa dapat memperhatikan permasalahan konstekstual berikut.

"Kakek menjual bermacam-macam buah. Buah yang dijualnya dikelompokkan menurut jenisnya. Ada apel, jeruk, semangka, dan lainnya.

a. Apakah nama buah yang dijual oleh kakek dapat diwakili oleh suatu lambang tertentu? Jika ya, kemukakan paling sedikit 4 contoh lambang yang dapat digunakan.
b. Apakah himpunan semesta dari lambang-lambang itu?
c. Pilih satu lambang kemudian sebutkan nama buah apa saja yang diwakili oleh lambang itu.
d. Tahukah Anda istilah yang cocok untuk menyebut nama lambang yang Anda pilih itu?

Misalkan lambang berupa huruf J mewakili buah jeruk yang dijual kakek.

a. Apa himpunan semesta dari J?
b. Apakah J itu dapat dikatakan sebagai variabel? Mengapa?
c. Tahukah Anda istilah aljabar yang cocok untuk menyebut J?"

Lanjutkan untuk memperkuat pemahaman konsep "variabel"!

"Saya dan dua teman saya, Budi dan Wati, mempunyai sejumlah uang. Berturut-turut uang kami berselisih 500 rupiah. "

Gambar 4. Uang Indonesia

a. Lambang apa saja yang dapat mewakili masing-masing uang kami? Berikan contohnya.

b. Pilih satu lambang dan berilah contoh bilangan-bilangan yang dapat diwakili oleh lambang yang Anda pilih itu.

c. Bagaimana himpunan semesta dari lambang yang kamu pilih itu?

d. Tahukah Anda istilah aljabar yang cocok untuk menyebut nama lambang yang Anda pilih itu?"

 Alternatif materi pembimbingan!

a. Bermacam-macam lambang (lazimnya bukan angka) dapat dipilih untuk mewakili bilangan uang saya dan teman-teman saya, misalnya X, A, U, Us, Ub, dan lainnya.

b. Misalkan salah satu lambang yang mewakili uang-uang kami adalah U. Lambang U dapat mewakili uang saya, Budi, dan Wati. Bilangan yang diwakili U misalnya 50, 100, 500, atau lainnya.

c. Lambang U mewakili mewakili uang-uang kami. Karena itu, bilangan yang diwakili U adalah bilangan positif. Menurut kelaziman (uang di Indonesia), nilai U pasti lebih dari 50. Jadi, himpunan semesta dari A adalah himpunan bilangan rasional positif lebih dari 50.

d. Dalam hal ini, U dapat dikatakan sebagai variabel aljabar. Pada saat belajar matematika, selanjutnya variabel aljabar cukup disebut variabel saja.

Aktivitas 4. Membangun Pemahaman tentang "Konstanta"

Pada pembahasan tentang lambang aljabar dinyatakan bahwa lambang aljabar adalah tempat bilangan-bilangan atau lambang yang mewakili bilangan-bilangan. Sementara bilangan-bilangan tertentu dalam semesta pembicaraannya diberi nama konstanta. Konstanta adalah lambang atau gabungan lambang yang menunjuk anggota tertentu dalam himpunan semestanya.

Cara untuk mengidentifikasi variabel dan konstanta dapat dilakukan dengan memecahkan masalah berikut ini.

Tiga anak Pak Alimuddin, yaitu Arman, Iwan, dan Susi berturut-turut berselisih umur dua tahun. Umur mereka antara 5 dan 15 tahun.

a. *Bila umur Susi p tahun, berapa umur Arman dan Iwan masing-masing? Apakah jawaban Anda menunjuk pada satu bilangan tertentu? Apakah jawabanmu tidak melibatkan bilangan tertentu?*
b. *Apakah jawabanmu itu dapat dikatakan sebagai variabel aljabar? Mengapa?*
c. *Dapatkah selisih umur antara Arman, Iwan, dan Susi diwakili oleh suatu lambang aljabar tertentu? Mengapa?*
d. *Tahukah kamu istilah aljabar yang tepat untuk menyebut lambang yang mewakili selisih umur Arman, Iwan, dan Susi?*

Alternatif materi pembimbingan!

a. Umur Iwan 2 tahun lebih tua dari Susi dan umur Arman 2 tahun lebih tua dari Iwan. Jika umur Susi p tahun, berarti umur Iwan = (p + 2) tahun. Umur Arman = $(p + 4)$ tahun. Jadi, bila nilai p diketahui, bilangan umur Iwan dan Arman akan menunjuk bilangan tertentu, yaitu tinggal menambahkannya dengan 2 dan 4.
b. Lambang p mewakili sebarang bilangan antara 5 dan 15, sedangkan bilangan penambah umur Iwan dan Arman dari umur Susi, yaitu 2 dan 4 sudah menunjuk pada bilangan tertentu. Dalam hal ini p adalah variabel Aljabar, sedang $p+2$ dan $p+4$ bukan variabel aljabar karena 2 dan 4 adalah bilangan yang sudah tertentu atau jelas nilainya.
c. Dalam permasalahan umur Arman, Iwan dan Susi ini, umur saudara-saudara Susi dapat diwakili dengan lambang tertentu. Misalkan selisih umur diwakili oleh lambang c, umur saudara-saudara Susi diwakili lambang p tambah c. Nilai c sudah tertentu, yaitu 2 bila hal itu menunjuk umur Iwan dan 4 bila hal itu menunjuk umur Arman.
d. Dalam hal ini c disebut konstanta aljabar.

Aktivitas 5. Mengenal Suku Aljabar

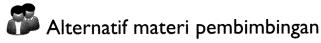
Salah satu lambang aljabardiberi istilah suku aljabar. Suku aljabaradalah seperangkat lambang aljabaryang dapat berupa variabel atau konstanta dan ditulis tanpa tanda operasi tambah atau kurang. Contohnya adalah p, 2h, ab, xyz, x^2. Selanjutnya suku aljabarcukup disebut sebagai suku.

Cara memperkenalkan suku aljabardapat dilakukan melalui pemberian contoh permasalahan berikut:

Gambar 5. Hewan Ternak

Ayah memiliki dua jenis ternak. Banyaknya kaki masing-masing jenis ternak berbeda. Banyaknya kaki pada tiap ekor ternak dari jenis yang berbeda berselisih dua.

a. *Lambang apa saja yang dapat dipilih untuk mewakili bilangan banyaknya kaki tiap ekor ternak milik Ayah?*
b. *Pilihlah lambang aljabar untuk mewakili banyaknya kaki dari tiap ekor jenis ternak yang dipelihara Ayah. Apakah himpunan semestanya?*
c. *Tahukah kamu istilah yang cocok untuk menyebut lambang yang kau pilih itu?*
d. *Setelah kamu pilih lambang untuk menyatakan banyaknya kaki tiap ekor ternak jenis I, nyatakan banyaknya kaki tiap ekor ternak jenis II dalam lambang yang sama dengan lambang yang kamu pilih untuk ternak jenis I itu. Apakah istilah aljabar untuk menyebut lambang pada ternak jenis I dan II sama?*

Alternatif materi pembimbingan

Pada contoh di atas, dapat dibahas bahwa:

a. **Lambang untuk mewakili bilangan banyaknya kaki tiap ekor ternak milik ayah dapat bervariasi, misalnya A, X, y, K, 4, 2, m dan lainnya.**
b. **Misalkan lambang untuk mewakili banyaknya kaki tiap ekor ternak jenis pertama adalah x dan lambang untuk mewakili banyaknya kaki tiap ekor ternak jenis kedua adalah y. Himpunan semesta dari x dan y adalah banyaknya kaki ternak tiap ekor.**
c. **x dan y disebut suku aljabar atau selanjutnya disebut suku saja.**
d. **Lambang untuk banyak kaki tiap ekor ternak jenis I adalah x. Karena banyaknya kaki tiap ekor ternak jenis II berselisih 2 dengan banyak kaki tiap ekor ternak jenis I, dapat dipilih lambang $x + 2$ untuk mewakili banyaknya kaki tiap ekor pada ternak jenis II. Dalam hal ini x disebut suku, namun x tambah 2 bukan suku karena memuat tanda tambah. Dalam hal ini x adalah variabel dan 2 adalah konstanta.**

Aktivitas 6. Mengenal Suku-Suku Sejenis

Suku-suku sejenis adalah suku-suku aljabar yang variabelnya dilambangkan dengan huruf yang sama. Contohnya x, $3x$, $-5x$, contoh lain, misalnya ab, $2ab$, $\sqrt{3}ab$.

Mengenalkan suku-suku sejenis dapat dilakukan dengan membimbingkan contoh berikut ini.

Pak Guru mempunyai beberapa buku bacaan. Banyaknya halaman pada suatu buku Pak Guru bila dilipatkan 2, 3, atau 4 akan merupakan banyaknya halaman pada tiga buku yang lain.

a. Pilihlah lambang-lambang aljabar yang paling tepat untuk mewakili banyaknya halaman dari empat buku Pak Guru tersebut.

b. Apakah lambang-lambang itu ada yang disebut variabel dan konstanta aljabar? Mengapa? Manakah itu?

c. Apakah himpunan semestanya?

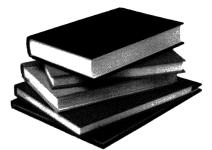
d. Apakah lambang-lambang itu disebut suku?

Pada contoh di atas dapat dibahas bahwa:
Misalkan:
h : **banyak halaman buku I**
$2h$: **banyak halaman buku II**
$3h$: **banyak halaman buku III**
$4h$: **banyak halaman buku IV**
Karena itu, h disebut sebagai variabel aljabar dan 2, 3, 4 adalah konstanta.
Himpunan semesta h ={banyak halaman buku} dan h, $2h$, $3h$, $4h$ adalah suku sejenis.

Aktivitas 7. Mengenal dan Memahami Koefisien Aljabar

Koefisien aljabar adalah bagian konstanta dari suatu suku aljabar yang menyatakan banyaknya variabel. Contohnya, suku $3xy$ mempunyai konstanta 3 untuk variabel xy. Tiga ini disebut koefisien dari xy. Suku ax mempunyai konstanta a, sehingga a disebut koefisien dari x. Pada suku p, konstantanya adalah 1. Satu pada suku p ini merupakan koefisien dari p.

Untuk memperkenalkan suku aljabar, dapat diberikan contoh permasalahan berikut:

Tiga di antara puluhan buku milik Pak Guru mempunyai banyak halaman yang unik. Banyak halaman buku II adalah 5 kali banyak halaman buku I, sedangkan banyak halaman buku III adalah 2 kali banyak halaman buku I. Misalkan banyak halaman buku I adalah h.

Gambar 6. Buku-Buku

a. *Berapa banyak halaman dari buku II dan III?*
b. *Apakah himpunan semesta dari banyak halaman buku I, II dan III milik Pak Guru itu?*
c. *Apakah banyaknya halaman buku I, II dan III milik Pak Guru itu masing-masing dapat disebut sebagai suku? Mengapa?*
d. *Jika masing-masing dapat disebut suku, adakah konstantanya? Berapakah konstanta pada masing-masing suku?*
e. *Tahukah kamu istilah aljabar yang tepat untuk menyebut konstanta pada suku-suku yang lambangnya mewakili banyak halaman buku I, II, dan III milik Pak guru?*

Alternatif materi pembimbingan

Pada contoh di atas dapat dibahas bahwa:

a. Banyak halaman buku I = h. Jadi, banyak halaman buku II = 5 × h = 5h dan banyak halaman buku III = 2 × h = 2h.
b. Karena banyak halaman suatu buku selalu menunjukkan bilangan bulat positif, himpunan semesta dari banyak buku I, II, dan III milik Pak Guru adalah bilangan bulat positif.
c. ***h*** adalah banyak halaman buku I milik Pak Guru. Lambang ***h*** mewakili atau tempat suatu bilangan positif. Mungkin ***h*** mewakili 25, mungkin pula mewakili 100 atau lainnya. Karena itu, ***h*** adalah variabel sehingga ***h***, 2***h*** dan 5***h*** disebut suku.
d. Karena pada ***h*** atau 1*h*, 2*h*, dan 5*h* ada lambang yang menunjuk pada bilangan tertentu yaitu 1, 2, dan 5, berturut-turut 1, 2, dan 5 itu disebut konstanta dari suku *h*, 2*h*, dan 5*h*.
e. Istilah yang tepat untuk menyebut konstanta pada suku adalah koefisien aljabar, yang selanjutnya disebut sebagai koefisien saja. Jadi, berturut-turut suku *h*, 2*h*, dan 5*h* mempunyai koefisien 1, 2, dan 5.

Aktivitas 8. Memahami Bentuk-Bentuk Aljabar

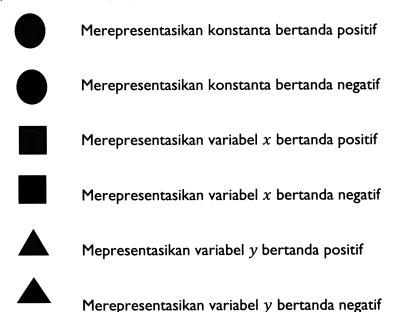
Yang dimaksud bentuk aljabar dalam pembelajaran matematika SMP adalah ungkapan atau *algebraic expression*. Bentuk aljabar dalam x berarti bentuk aljabar dengan variabel x dan lambang lainnya bukan variabel. Bentuk aljabar yang terdiri atas suku-suku sejenis dapat disederhanakan (dengan dijumlahkan atau dikurangkan) sehingga diperoleh suku tunggal. Contoh bentuk aljabar: $2a + 3b$, $pq + 3a - x$, $k + 4k$, $p^2 + p - 6$

Dalam aljabar, bentuk-bentuk aljabar dapat disederhanakan apabila bentuk aljabar tersebut memuat beberapa suku yang sejenis, misalnya $5x + 3y - 5 - 2x + 7y + 6$. Bentuk aljabar ini dapat disederhanakan dengan mengelompokkan suku-suku sejenis, yaitu $(5x - 2x) + (3y + 7y) + (-5 + 6) = 3x + 10y + 1$. Namun, untuk memahami lebih mendalam penyederhanaan bentuk aljabar tersebut, perhatikan strategi penggunaan media manipulatif dalam aktivitas pembelajaran berikut ini.

Bermain Kepingan Aljabar

Tujuan: Menyederhanakan bentuk Aljabar

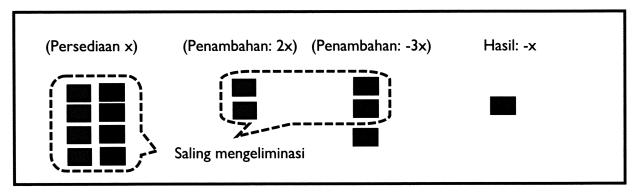
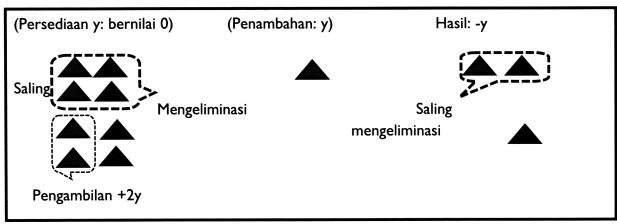
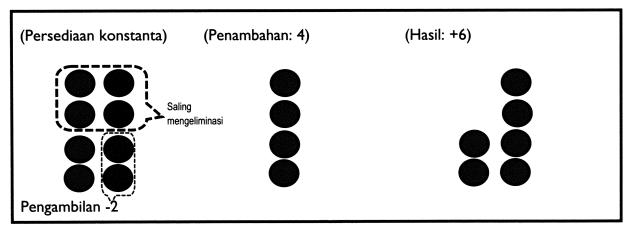
Siapkan kepingan yang dapat terbuat dari logam atau karton dengan berbagai bentuk, misalnya persegi, segitiga, lingkaran, dan sebagainya. Pilihlah kepingan yang berbentuk lingkaran dengan satu warna, misalnya putih. Pilihlah 2 bentuk kepingan lain, persegi dan segitiga masing-masing dengan dua warna berbeda, misalnya merah dan biru.

Andaikan kita akan menyederhanakan bentuk aljabar yang melibatkan 2 variabel, katakan x dan y, dapat disediakan kepingan sebagaimana gambar di bawah ini.

Selanjutnya dapat dibuat kesepakatan tentang penggunaan operasi aljabar bahwa operasi penjumlahan bentanda "+" merepresentasikan penambahan kepingan dan operasi pengurangan bertanda "–" merepresentasikan pengurangan kepingan dari yang tersedia. Penggabungan kepingan dalam bentuk yang sama dengan warna yang berbeda merepresentasikan "nol" (saling mengeliminasi).

Selanjutnya pada saat hendak memulai bermain kepingan aljabar untuk menyederhanakan bentuk aljabar, berikan persediaan kepingan sesuai bentuk yang diperlukan secara berpasangan warna, merah, dan biru.

Sebagai contoh, penyederhanaan bentuk aljabar dengan dua variabel:

$$2x + y + 4 + (-3x) - 2y - (-2)$$

dapat diselesaikan dengan bermain kepingan aljabar sebagaimana ditunjukkan pada gambar di bawah ini.

Gambar 7. Representasi Penyederhanaan Bentuk Aljabar dengan Bermain Kepingan

Berdasar permainan kepingan aljabar yang ditunjukkan pada gambar di atas, bentuk sederhana dari $\mathbf{2x + y + 4 + (-3x) - 2y - (-2)}$ adalah $-x - y + 6$.

Dengan menggunakan prinsip penggunaan media permainan kepingan aljabar di atas, diharapkan siswa dapat berlatih untuk menyederhanakan bentuk-bentuk aljabar berikut ini.

(a) $2x + (-3x) + 6 - 3z + 4z - 5$
(b) $x^2 - 2x + (-3) - 3x^2 + x - 1$
(c) $-a + 3b - (-5) - 3a + 2b - 1$

2.3 Melatihkan Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi

Pendekatan pemecahan masalah dapat diterapkan pada pembelajaran bentuk-bentuk aljabar, misalnya dengan melatihkan kemampuan berpikir tingkat tinggi. Sebagai calon guru, mahasiswa dapat pula melatih diri untuk merancang masalah-masalah matematika yang melibatkan operasi bentuk aljabar sebagai konsep utama. Untuk itu, beberapa strategi yang disarankan agar mahasiswa memiliki kemampuan mengembangkan masalah-masalah matematika yang melibatkan kemampuan berpikir tingkat tinggi adalah:

1) Buatlah permasalahan nonrutin atau soal yang tidak dapat diselesaikan dengan menerapkan secara langsung prinsip operasi bentuk aljabar.
2) Pikirkan bahwa untuk menyelesaikannya membutuhkan kemampuan mengaitkan antar berbagai konsep matematika.
3) Pikirkan pertanyaaan-pertanyaan dalam masalah yang Anda rancang yang penyelesaiannya memerlukan strategi penalaran secara logis dan kemampuan menyusun pemodelan matematika.
4) Berlatihlah menyelesaikan berbagai masalah matematika, kemudian kembangkan masalah yang sudah Anda selesaikan dengan menggunakan penalaran logis.
5) Pikirkan bahwa masalah yang Anda rancang adalah soal-soal matematika pada level menalar, menganalisis, meyintesis, mengevaluasi, dan membutuhkan kemampuan berpikir kreatif.

Aktivitas 9. Memecahkan Masalah Berkaitan Bentuk-Bentuk Aljabar

Beberapa permasalahan yang melibatkan kemampuan berpikir tingkat tinggi dicontohkan berikut ini.

1) *Ibu hendak membuat kotak kado yang berbentuk seperti balok dari selembar karton yang berukuran 54 cm^2. Tentukan ukuran kotak kado yang dapat dibuat oleh ibu jika ukuran lebar kotak sama dengan ukuran tingginya.*
2) *Budi dan Radi sedang makan malam bersama dengan teman-temannya. Ketika hendak membayar tagihan rumah makan, mereka sepakat untuk membagi tagihan secara merata. Hasilnya setiap orang membayar Rp 12.000. Namun, teman-teman Budi dan Radi sepakat untuk tidak melibatkan Budi dan Radi dalam membayar tagihan. Setelah tagihan dibagi kembali, ternyata setiap orang harus membayar Rp16.000.*

Buatlah model matematika permasalahan ini, kemudian tentukan berapa banyak teman Budi dan Radi yang ikut dalam acara makan malam tersebut.

Strategi yang disarankan!

Gunakan langkah-langkah pola dalam menyelesaikan masalah pada aktivitas 9!
[Memahami masalah (*see*), merencanakan penyelesaian (*plan*), menerapkan strategi penyelesaian (*do*), dan memeriksa kembali (*check*)]

2.4 Asesmen

Berdasar alternatif aktivitas pembelajaran yang diuraikan di atas yang diarahkan pada pembentukan pengetahuan faktual, pemahaman konsep, dan pemecahan masalah, maka pencapaian tujuan pembelajaran materi bentuk-bentuk aljabar dapat diukur dengan menggunakan indikator pencapaian sebagai berikut:

1) Dapat membedakan variabel dan konstanta dalam masalah-masalah nyata.
2) Dapat menuliskan lambang yang menunjukkan variabel, konstanta, atau koefisien.
3) Dapat mengelompokkan dan menyederhanakan suku-suku sejenis dari suatu bentuk aljabar.

4) Dapat menyusun model matematika bentuk-bantuk aljabar dari suatu masalah nyata.
5) Dapat memecahkan masalah matematika dari suatu permasalahan yang melibatkan bentuk-bentuk aljabar.

Pencapaian-pencapaian ini dapat diukur dan dinilai selama pembelajaran melalui observasi, wawancara, dan portofolio. Penilaian produk berbasis kinerja dapat dilakukan di akhir pembelajaran dalam bentuk tes hasil belajar, proyek dan investigasi matematika, serta portofolio.

Evaluasi

Contoh soal berkaitan materi tentang bentuk-bentuk aljabar yang dapat digunakan untuk mengukur ketercapaian tujuan pembelajaran adalah:

1. Perhatikan objek 2 bola kaki yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini.

Gambar 8. Dua Bola Kaki

Rumuskan masalah-masalah matematika untuk mengukur pemahaman siswa yang benar tentang:
(1) Variabel dan lambangnya.
(2) Konstanta.
(3) Koefisien variabel.
(4) Suku-suku sejenis.

2. Pak Jono memelihara hewan ternak seekor kambing, 2 ekor ayam, dan 3 ekor bebek. Seminggu kemudian Pak Jono mendapat kiriman 5 ekor kambing dan 4 ekor bebek dari Ahmad, putranya dari Kalimantan. Beberapa hari kemudian 2 ekor bebek Pak Jono mati. Namun, dia kembali mendapat kiriman 7 ekor ayam dari Ahmad. Selama memelihara seluruh hewan ternaknya, Pak Jono telah mengerluarkan biaya pakan

ternak sebesar Rp 350.000. Suatu hari Pak Joni hendak membeli seluruh hewan ternak Pak Jono dengan harga sama dengan Rp 2.175.000 ditambah harga masing-masing seekor kambing, ayam, dan bebek dikurangi biaya pakan ternak yang telah dikeluarkan Pak Jono.

1) Simbolkan variabel dengan koefisiennya serta konstanta yang dilibatkan dalam permasalahan nyata di atas.
2) Rumuskan dengan model matematika yang lengkap sesuai permasalahan di atas.
3) Sederhanakan model matematika tersebut dengan mengelompokkan suku-suku yang sejenis,

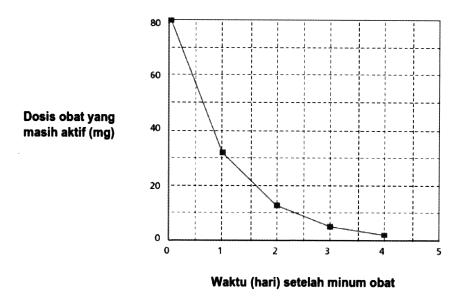
Refleksi...!!!

Apabila satu atau beberapa indikator pencapaian hasil belajar tidak tercapai selama proses dan akhir pembelajaran, dosen dapat merancang alternatif aktivitas pembelajaran yang lain dengan merancang konteks permasalahan matematika lain yang lebih mudah dipahami.

3. Relasi dan Fungsi

Sering kita membaca dan mendengar istilah-istilah "bersaudara dengan" atau Ali bersaudara dengan Ani. "Bersaudara dengan" menyatakan relasi atau hubungan, sedangkan Ali bersaudara dengan Ani menyatakan relasi antara 2 manusia. Ada juga relasi antara dua himpunan yang berbeda seperti relasi "suka makan" antara himpunan mahasiswa dengan makanan. Dengan relasi ini, dapat dibuat kalimat-kalimat seperti "Yusuf suka makan nasi goreng", "Nurul suka makan nasi kuning".

Relasi dan fungsi merupakan konsep dalam aljabar yang memiliki pemanfaatan dalam kehidupan sehari-hari. Perhatikan masalah di bawah ini.

Joko minum obat dengan dosis 80 mg untuk mengontrol tekanan darahnya. Grafik berikut memperlihatkan dosis obat yang masih aktif dalam darah Joko selama empat hari:

Gambar 9. Grafik Hubungan Antara Dosis Obat dan Waktu Minum

Permasalahan yang mungkin muncul adalah: Berapa persentase dosis obat yang masih aktif dari hari sebelumnya pada akhir setiap hari?

Untuk menjawab masalah tersebut di atas, diperlukan pemahaman relasi dan fungsi.

3.1 Kesalahan Pemahaman Konsep

Berdasar pengalaman beberapa guru yang terlibat dalam penulisan buku ini, masih ditemukan beberapa bentuk kesalahan konsepsi yang biasa terjadi ketika siswa telah mempelajari materi relasi dan fungsi, antara lain:

1) Kesalahan representasi tentang relasi
   Sebagaimana guru memperkenalkan konsep relasi melalui dua himpunan dan menyatakannya dalam diagram Venn, berdampak pada pemahaman siswa tentang relasi bahwa relasi hanya bisa dinyatakan dengan diagram Venn.
2) Kesalahan mengidentifikasi relasi dari dua himpunan yang didefinisikan.
   Siswa menyatakan bahwa relasi yang berlaku dari himpunan A = {1, 2, 3, 4, 5} ke himpunan B = {7, 9, 11, 13, 15} adalah *bilangan bulat.* Namun, beberapa siswa menyatakan dengan relasi yang sederhana "kurang dari".

3) Kesalahan siswa dalam menyebutkan domain dan *range* dari suatu fungsi. Misalnya, pada fungsi dari Z ke Z dengan $f(x) = x^2$. (Z bilangan bulat). Domain f adalah bilangan bulat dan range dari f juga bilangan bulat.

3.2 Proses Pembelajaran

Untuk merancang kegiatan pembelajaran "Relasi dan Fungsi", perlu dirancang lintasan pembelajaran yang akan menjadi panduan pengajar mengembangkan aktivitas pembelajaran. Tahapan aktivitas pembelajaran 'Relasi dan Fungsi' dilaksanakan dengan alur seperti pada diagram berikut (petak berwarna kuning).

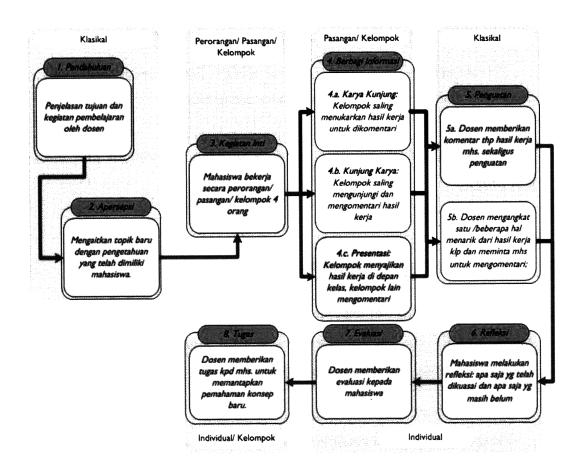



Diagram 3. Alur Pembelajaran 'Relasi dan Fungsi'

1. Pendahuluan

Dosen menyampaikan tujuan pembelajaran, yaitu mahasiswa mampu:

a. Menyatakan suatu relasi.
b. Mengenal domain, kodomain, dan *range*.
c. Memahami fungsi (pemetaan).
d. Mengidentifikasi sifat-sifat fungsi.

2. Apersepsi

Dosen menggali informasi tentang kemampuan mahaiswa terkait dengan relasi, domain, kodomain, *range*, dan fungsi.

3. Kegiatan Inti

Mahasiswa secara berkelompok diminta melakukan aktivitas 1 - 5 (lihat aktivitas 1 - 5).

4. Berbagi Informasi

Mahasiswa saling bertukar hasil kerja antarkelompok dan saling memberi umpan balik secara tertulis pada kertas terpisah.

5. Penguatan

Dosen memberi penegasan tentang:

a. Bagaimana menyatakan suatu relasi.
b. Pengertian domain, kodomain, dan *range*.
c. Fungsi (pemetaan).
d. Sifat-sifat fungsi.

6. Refleksi

Mahasiswa menulis

- Apa saja yang sudah dikuasai.
- Apa saja yang belum dipahami.

7. Evaluasi

Mahasiswa melaksanakan aktivitas 6 (lihat aktivitas 6).

Aktivitas 1. Menyatakan Suatu Relasi

Menyatakan suatu relasi secara matematis merupakan suatu aktivitas yang sangat relevan dengan kehidupan sehari-hari. Karena itu, sangat menarik menyajikan materi ini dengan strategi curah pendapat untuk menyatakan relasi yang dapat dimunculkan dari situasi tertentu yang diberikan. Sebagai contoh, disajikan situasi yang ditunjukkan melalui gambar berikut ini.

Gambar 10. Membaca Buku di Perpustakaan

Berdasar gambar di atas, amatilah aktivitas yang dilakukan semua siswa yang tampak pada gambar. Andaikan empat siswa di perpustakaan tersebut adalah Amir, Budi, Ani, dan Wati membaca buku pelajaran. Amir membaca buku sejarah, Budi membaca buku IPA, Ani membaca buku matematika, dan Wati juga membaca buku matematika.

Dapatkah *Anda menyebutkan nama relasi pada situasi yang digambarkan di atas?*

Siswa-siswa yang membaca dapat dikatakan sebagai anggota himpunan daerah asal. Semua buku yang ada di dalam perpustakaan dapat dikatakan sebagai anggota himpunan daerah kawan. Buku-buku yang dibaca oleh Amir, Budi, Ani, dan Wati dapat dikatakan anggota himpunan daerah hasil, yakni anggota himpunan daerah kawan yang berpasangan dengan anggota himpunan daerah asal.

Lanjutkan untuk memperkuat pemahaman konsep tentang relasi!

Suatu relasi dapat pula ditemukan pada himpunan **A** = { 2 , 3 , 4 , 5 } dan himpunan **B** = { 3 , 5 , 7 , 9 , 12 }. Misalnya, relasi anggota himpunan A adalah "*faktor dari* "anggota himpunan B.

Dapatkah Anda menyebutkan anggota himpunan pada daerah asal, anggota himpunan pada daerah kawan, dan anggota himpunan pada daerah hasil pada relasi yang dicontohkan tersebut?

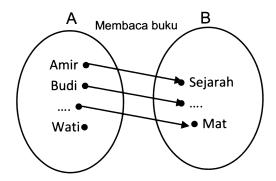
Relasi adalah ....
....

Beberapa istilah berkaitan dengan konsep relasi yang perlu didefinisikan adalah:

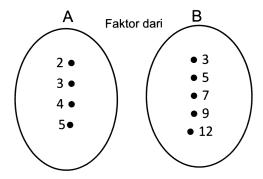
(1) Domain didefinisikan sebagai anggota himpunan daerah asal (anggota himpunan pertama).
(2) Kodomain didefinisikan sebagai anggota himpunan daerah kawan (anggota himpunan kedua).
(3) *Range* didefinisikan sebagai anggota himpunan daerah hasil (anggota himpunan kedua yang merupakan pasangan anggota himpunan pertama).

Suatu relasi dapat dinyatakan dengan berbagai cara. Menyatakan relasi dari himpunan A ke himpunan B dapat dilakukan dengan:
(1) Diagram panah
(2) Tabel
(3) Pasangan berurutan
(4) Grafik Cartesius

Relasi dengan diagram panah

Relasi yang ditunjukkan pada situasi membaca buku di perpustakaan sesuai gambar 18 di atas jika dinyatakan dengan diagram panah:

Gambar 11. Diagram Panah pada Relasi Membaca Buku

Untuk memperkuat pemahaman Anda, lengkapi titik-titik dan tanda panah yang belum digambarkan pada relasi yang dinyatakan dengan diagram panah di atas.

Jika dinyatakan dengan diagram panah, lengkapi tanda panah pada relasi "faktor dari" yang ditunjukkan berikut ini.

Gambar 12. Diagram Panah pada Relasi Faktor dari

Relasi dengan tabel

Suatu relasi dapat dinyatakan dalam bentuk tabel. Relasi "Membaca buku" pada contoh di atas yang dinyataan dalam bentuk tabel sebagaimana tabel berikut ini.

Nama Siswa (x)	AMIR	BUDI	....	...
Buku yang Dibaca (y)	Sejarah	....	Matematika	,,,,

Untuk memperkuat pemahaman Anda, lengkapi titik-titik pada tabel di atas.

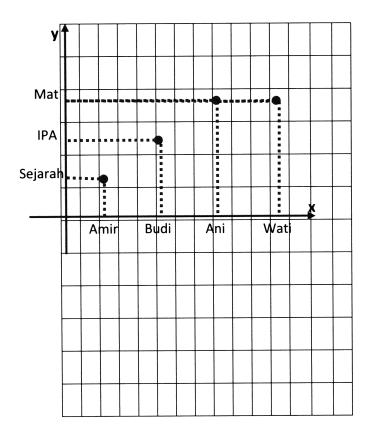
Nyatakan dengan bentuk tabel pada relasi "faktor dari" pada himpunan A = {2 , 3 , 4 , 5} terhadap himpunan B = {3 , 5 , 7 , 9 , 12}!

Relasi dengan pasangan berurutan

Menyatakan relasi dalam bentuk lainnya adalah dengan pasangan berurutan, (x, y). Notasi x menyatakan anggota dari domain dan y menyatakan anggota *range* dari suatu relasi.
Relasi "faktor dari" pada himpunan A = {2, 3, 4, 5} terhadap himpunan B = {3, 5, 7, 9, 12} jika dinyatakan dalam pasangan berurutan, diperoleh {(2, 12), (3, 3), (3, 9), (3, 12), (4, 12), (5, 5)}.

Tentu dengan mudah Anda dapat menyatakan dengan pasangan berurutan pada relasi "membaca buku" pada situasi yang dicontohkan di atas.

Relasi dengan grafik Cartesius

Grafik Cartesius adalah grafik yang digambarkan pada sumbu koordinat XOY. Relasi "membaca buku" yang dinyatakan dalam grafik Cartesius sebagaimana gambar di bawah ini.

Gambar 13. Grafik Cartesius Panah pada Relasi "Membaca Buku"

Untuk memperkuat pemahaman Anda, nyatakan dengan grafik Cartesius pada relasi "faktor dari" pada himpunan A = {2 , 3 , 4 , 5} terhadap himpunan B = {3 , 5 , 7 , 9, 12}!

Aktivitas 2. Menemukan Sifat-Sifat Relasi

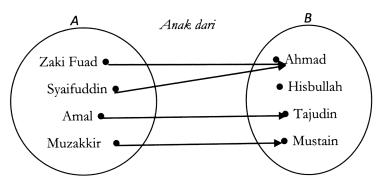
Pada bagian ini diuraikan beberapa contoh relasi. Identifikasilah sifat yang berlaku pada contoh refleksi yang diberikan.

(1) Relasi "sama dengan" pada himpunan bilangan riil. Apakah setiap bilangan sama dengan bilangan riil itu sendiri atau bersifat ***refleksif***? Jelaskan dan berikan contoh.
Rumuskan sifat refleksif pada suatu relasi.

(2) Relasi "bersaudara dengan" pada himpunan manusia. Jika Amir bersaudara dengan Umar, apakah dapat juga dinyatakan bahwa Umar bersaudara dengan Amir? Jika ya, relasi yang demikian disebut ***simetris***.
Apakah relasi "orang tua dari" merupakan relasi simetris?
Rumuskan sifat simetris pada suatu relasi.

(3) Relasi "kurang dari" pada himpunan bilangan bulat. Apakah berlaku bahwa jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$, a, b, c anggota bilangan bulat? Jika benar, relasi tersebut dikatakan bersifat ***transitif***.
Selidikilah, relasi yang manakah berikut ini yang bersifat transitif:
(a) Relasi "bersaudara"
(b) Relasi "orang tua dari"
(c) Relasi "faktor dari" pada himpunan-himpunan bilangan asli.

(4) Jika suatu relasi memiliki sifat refleksif, simetri, dan transitif, maka relasi tersebut bersifat ***ekivalen***.
Selidikilah apakah relasi "sama dengan" pada himpunan bilangan nyata bersifat ekivalen?
Sebutkan beberapa contoh relasi yang bersifat ekivalen.

Perhatikan relasi "anak dari" dari himpunan anak-anak (A) ke himpunan ayah (B) seperti ditunjukkan oleh diagram panah berikut.

Gambar 14. Diagram Panah pada relasi "anak dari"

Dari diagram di atas, selidikilah apakah setiap anak pada himpunan A hanya mempunyai satu ayah pada himpunan B? Apakah Anda menemukan bahwa setiap anggota A dipasangkan tepat satu anggota B?
Ilustrasi berikut ini merupakan contoh lain yang mempunyai sifat relasi seperti relasi "anak dari" yang dicontohkan di atas. Relasi tersebut dinyatakan dalam tabel yang menunjukkan ukuran sepatu yang dapat diamati pada 5 orang siswa di kelas, misalnya:

Nama Siswa (x)	Amir	Budi	Cinda	Doni	Eko
Ukuran Sepatu (y)	38	39	37	37	40

Selidikilah apakah:
(1) Setiap siswa mempunyai ukuran sepatu?
(2) Setiap siswa memiliki tepat satu ukuran sepatu?

Dua relasi yang dicontohkan di atas disebut sebagai ***fungsi***. Selidikilah, jika suatu relasi yang memetakan himpunan A ke himpunan B dikatakan fungsi, apakah:
(1) Setiap anggota A mempunyai pasangan di B?
(2) Setiap anggota A dipasangkan dengan tepat satu anggota di B?

Simpulkan pengertian umum dari fungsi yang memetakan himpunan A ke himpunan B!

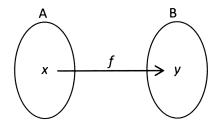
Notasi penulisan fungsi

Suatu fungsi yang memetakan x anggota A ke y anggota B dituliskan:

$$f : x \rightarrow y$$

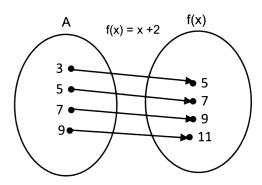
$$f : x \rightarrow f(x)$$

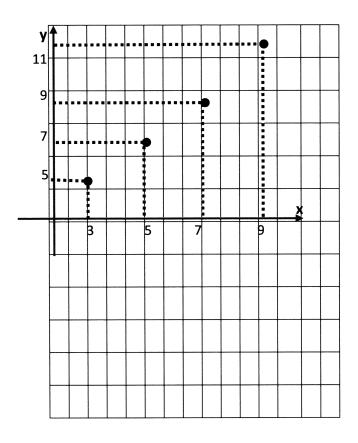
Jadi, y = f(x), dibaca f memetakan x anggota A ke y anggota B

Ilustrasi fungsi dari A ke B digambarkan dalam diagram panah berikut ini.

Gambar 15. Diagram Panah pada Fungsi y = f(x)

Aktivitas 3. Menghitung Nilai Fungsi

Suatu fungsi f dari himpunan A = {3, 5, 7, 9} ke himpunan B = {bilangan cacah} ditentukan dengan aturan $f(x) = x + 2$.

Fungsi: $f(x) = x + 2$ tersebut jika dinyatakan dengan panah:

Gambar 16. Diagram Panah pada Fungsi f(x) = x+2

$f(x) = x + 2$ tersebut jika dinyatakan dengan diagram Cartesius:

Gambar 17. Diagram Cartesius pada Fungsi f(x) = x+2

$f(x) = x + 2$ tersebut jika dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan:

{(3, 5), (5, 7), (7, 11), (9, 11)}

Dengan mengamati aturan fungsi $f(x) = x + 2$ dan semua penyajian fungsi di atas, tentukan *f(3), f(9), f(13),* dan nilai *f* pada *x* = *8*!

Aktivitas 4. Mengenal Sifat-Sifat Fungsi

Beberapa sifat dari suatu fungsi dapat dikenal dengan melakukan dan mendiskusikan aktivitas berikut ini.

Perhatikan dua diagram panah berikut ini.

Gambar 18(a) menunjukkan diagram panah fungsi f dari himpunan $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ke himpunan $B = \{1,2,3,4\}$ yang ditentukan oleh relasi "dua kali ". Himpuan A adalah domain, himpunan B kodomain, dan himpunan semua peta yaitu $\{1,2,3,4\}$ adalah daerah hasil fungsi f.

Gambar 17(b) menunjukkan diagram panah fungsi g dari himpunan $C = \{4, 8, 9\}$ ke himpunan $D = \{2, 3, 5, 7\}$ yang ditentukan oleh relasi "kelipatan" himpunan C adalah domain, himpunan D kodomain, dan himpunan semua peta yaitu $\{2, 3\}$ adalah daerah hasil fungsi g.

Gambar 18. Diagram Panah Dua Relasi Berbeda

Selidikilah:

(1) Apakah f dan g keduanya merupakan fungsi?

(2) Dapatkah Anda menemukan perbedaan dua relasi ini?

(3) Apakah pada fungsi f tidak ada anggota-anggota himpunan A yang mempunyai peta yang sama di dalam B? Bagaimana dengan fungsi g?

Jika Anda menemukan fungsi, yaitu $f : A \rightarrow B$ yang mempunyai sifat bahwa tidak ada anggota himpunan A yang mempunyai peta yang sama di B, fungsi itu dinamakan "injektif".

(4) Apakah pada fungsi f daerah hasilnya sama dengan kodomainnya? Bagaimana dengan g?

Jika Anda menemukan fungsi, yaitu $f : A \rightarrow B$ yang mempunyai sifat bahwa daerah hasilnya sama dengan kodomainnya, fungsi itu dinamakan "surjektif".

(5) Apakah fungsi f memiliki sifat injektif sekaligus surjektif? Bagaimana dengan fungsi g?

Jika Anda menemukan fungsi, yaitu $f : A \rightarrow B$ yang mempunyai sifat injektif sekaligus surjektif, fungsi itu dinamakan "bijektif".

Mahasiswa dapat mendiskusikan di bawah bimbingan dosen kiat merumuskan secara formal sifat-sifat fungsi injektif, surjektif, dan bijektif dengan menggunakan notasi-notasi fungsi dan himpunan.

3.3 Melatihkan Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi

Melatihkan kemampuan berpikir tingkat tinggi dalam memecahkan masalah yang melibatkan konsep relasi dan fungsi dapat dikembangkan dalam pembelajaran ini. Untuk itu, dapat dirancang masalah-masalah matematika yang melibatkan konsep relasi dan fungsi serta beberapa konsep matematika lainnya yang terkait. Beberapa strategi yang disarankan agar mahasiswa dapat mengembangkan masalah-masalah matematika yang melibatkan kemampuan berpikir tingkat tinggi adalah:

1) Buatlah permasalahan nonrutin atau soal yang tidak dapat diselesaikan dengan menerapkan secara langsung konsep dan prinsip relasi dan fungsi.
2) Pikirkan bahwa untuk menyelesaikannya membutuhkan kemampuan mengaitkan antar berbagai konsep matematika.
3) Pikirkan pertanyaaan-pertanyaan dalam masalah yang Anda rancang yang penyelesaiannya memerlukan strategi penalaran secara logis dan menghubungkan antar berbagai hal (konsep dan prinsip matematika).
4) Berlatihlah menyelesaikan berbagai masalah matematika, kemudian kembangkan masalah yang sudah Anda selesaikan dengan menggunakan penalaran logis.
5) Pikirkan bahwa masalah yang Anda rancang adalah soal-soal matematika pada level menalar, menganalisis, menyintesis, mengevaluasi, dan membutuhkan kemampuan berpikir kreatif.

Aktivitas 5. Memecahkan Masalah Berkaitan Relasi dan Fungsi

Beberapa permasalahan yang melibatkan kemampuan berpikir tingkat tinggi dicontohkan berikut ini. Diskusikan dan selesaikan.

1) Lima orang bersaing dalam kontes melempar anak panah. Setiap orang mempunyai dua anak panah untuk dilemparkan kesasaran bundaran yang sama. Nilai setiap orang adalah jumlah nilai dalam daerah sasaran yang telah dipanah. Skor untuk daerah sasaran adalah bilangan 1 sampai 10. Setiap lemparan mereka mengenai daerah sasaran yang berbeda. Nilainya, Alice 16 poin, Ben 4 poin, Cindy 7 poin, Dave 11 poin, dan Ellen 17 poin. Siapa di antara mereka yang mengenai sasaran 6 poin?
2) Enam anak pada daftar berikut berasal dari dua keluarga yang masing-masing tiga orang bersaudara. Setiap anak bermata biru atau cokelat, dan berambut hitam atau pirang. Anak dari keluarga yang sama paling sedikit mempunyai satu kesamaan ciri-ciri.

Anak	Warna Mata	Warna Rambut
Benyamin	Biru	Hitam
Jim	Cokelat	Pirang
Nadine	Cokelat	Hitam
Austin	Biru	Pirang
Tevyn	Biru	Hitam
Sue	Biru	Pirang

Yang manakah merupakan saudara Jim?

3.4 Assesmen

Berdasar alternatif aktivitas pembelajaran yang diuraikan di atas yang diarahkan pada pembentukan pengetahuan faktual, pemahaman konsep, dan pemecahan masalah, maka pencapaian tujuan pembelajaran materi relasi dan fungsi dapat diukur dengan menggunakan indikator pencapaian sebagai berikut:

1) Dapat menyatakan relasi dari dua himpunan.
2) Dapat menyatakan relasi dengan himpunan pasangan terurut.
3) Dapat membedakan suatu relasi yang merupakan fungsi atau bukan fungsi.
4) Dapat menyebutkan domain, kodomain, dan *range* dari suatu fungsi.
5) Dapat menerapkan prinsip relasi dan fungsi dalam memecahkan masalah matematika.

Pencapaian-pencapaian ini dapat diukur dan dinilai selama pembelajaran melalui observasi, wawancara, dan portofolio. Penilaian produk berbasis kinerja dapat dilakukan diakhir pembelajaran dalam bentuk tes hasil belajar, proyek dan investigasi matematika, dan portofolio,

Apabila satu atau beberapa indikator pencapaian hasil belajar tidak tercapai selama proses dan akhir pembelajaran, dapat digunakan alternatif aktivitas pembelajaran yang lain dengan merancang konteks permasalahan matematika yang lain yang lebih mudah dipahami.

 Evaluasi dan Umpan Balik!

Contoh soal berkaitan materi tentang relasi dan fungsi yang dapat digunakan untuk mengukur ketercapaian tujuan pembelajaran adalah:

1. Diketahui:

A = { Riska, Amir, Deni, Rudi}

B = { Firman, Sita, Edi, Reni, Aisyah}

Jika Riska mempunyai saudara yang bernama Firman dan Sita,

Amir mempunyai saudara yang bernama Edi,

Deni tidak mempunyai saudara,

Rudi mempunyai saudara yang bernama Reni dan Aisyah,

(1) Nyatakan relasi bersaudara tersebut di atas dengan diagram Venn (diagram panah).

(2) Tuliskan pasangan terurut dari orang-orang yang bersaudara.

2. Diketahui f: R→R, dengan f: x $\to \frac{(x-2)}{\sqrt{x+2}}$

   (1) Apakah semua bilangan riil R mempunyai nilai pada f?

   (2) Berapakah nilai f jika x = 2, dan x = -3?

   (3) Tuliskan domain, kodomain, dan *range* dari

Refleksi...!!!

Apabila satu atau beberapa indikator pencapaian hasil belajar tentang relasi dan fungsi tidak tercapai selama proses dan akhir pembelajaran, dosen dapat merancang alternatif aktivitas pembelajaran yang lain dengan merancang konteks permasalahan matematika lain yang lebih mudah dipahami.

4. Persamaan Garis Lurus

Persamaan garis lurus banyak digunakan untuk menaksir suatu nilai dari sebuah peristiwa. Sebagai contoh, seseorang dapat menaksir jarak yang mereka tempuh dengan kecepatan konstanta dalam waktu tertentu. Begitu pula seseorang mudah memprediksi kecepatan kendaraannya jika akan menempuh jarak tertentu dengan waktu tertentu. Contoh lain di dalam memprediksi biaya produksi, sebuah perusahaan dapat membuat persamaan garis lurus dengan memperhitungkan *fixed cost* dan biaya produksi perunit untuk menaksir biaya yang harus dikeluarkan untuk memproduksi sejumlah unit barang.

4.1 Kesalahan Pemahaman Konsep

Berdasar pengalaman beberapa guru yang terlibat dalam penulisan buku ini, masih ditemukan beberapa bentuk kesalahan konsepsi yang biasa terjadi ketika siswa telah mempelajari materi persamaan garis lurus, antara lain:

1) Kesalahan menentukan gradien atau koefisien arah garis lurus dari berbagai persamaan garis lurus yang diberikan. Misalnya, 3y = 4x – 5, siswa menjawab gradiennya 4. Pada persamaan 3y – 4x + 5 = 0, siswa menyebutkan gradien garisnya -4/5. Pada pemahaman lain 4x = 3y – 5, siswa menyebutkan gradiennya ¾ dan 3y = 4x – 5 siswa menjawab gradiennya juga ¾.

2) Kesalahan menentukan gradien suatu garis lurus yang tegak lurus dengan garis tertentu. Misalnya, garis k yang tegak lurus dengan garis *l* dengan persamaan y = 2x + 3 mempunyai gradien m_k = -1 dengan alasan bahwa hubungan gradien dua garis itu adalah $m_k.m_l$ = -1.

Pertanyaan untuk didiskusikan.
Jelaskan bagaimana pemahaman yang benar sesuai konsep yang sebenarnya pada tiga bentuk kesalahan pemahaman konsep di atas!

4.2 Proses Pembelajaran

Untuk merancang kegiatan pembelajaran persamaan garis lurus, perlu dirancang lintasan pembelajaran yang akan menjadi panduan pengajar mengembangkan aktivitas pembelajaran. Tahapan aktivitas pembelajaran 'Persamaan Garis Lurus' terlihat seperti pada diagram berikut (petak kuning).

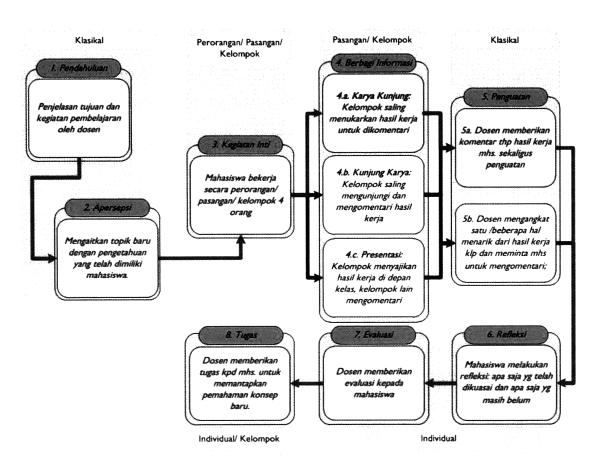



Diagram 4. Alur Pembelajaran 'Persamaan Garis Lurus'

1. Pendahuluan

Dosen menyampaikan tujuan pembelajaran, yaitu mahasiswa mampu:

a) Menuliskan persamaan garis lurus.
b) Memahami gradien dan garis lurus.
c) Memahami hubungan gradien antara dua garis lurus.
d) Mampu memecahkan masalah berkaitan persamaan garis lurus.

2. Apersepsi

Dosen menggali informasi tentang kemampuan mahasiswa terkait dengan gradien, garis lurus, dan aplikasinya.

3. Kegiatan Inti

Mahasiswa secara berkelompok diminta melakukan aktivitas 1–3 (lihat aktivitas 1–3).

4. Berbagi Informasi

Mahasiswa saling bertukar hasil kerja antarkelompok dan saling memberi umpan balik secara tertulis pada kertas terpisah.

5. Penguatan

Dosen memberi penegasan tentang:

a) Pengertian gradien kaitannya dengan garis lurus.
b) Cara menuliskan persamaan garis lurus.
c) Hubungan gradien antara dua garis lurus;

6. Refleksi

Mahasiswa menulis

- Apa saja yang sudah dikuasai.
- Apa saja yang belum dipahami.

7. Evaluasi

Mahasiswa melaksanakan aktivitas 4 (lihat aktivitas 4).

Aktivitas 1. Menemukan Persamaan Garis Lurus

Bagaimana cara Anda mengajarkan konsep persamaan garis lurus agar para siswa terlibat secara aktif dalam pembelajaran dan para siswa dapat mengonstruksi sendiri pengetahuannya tentang persamaan garis lurus?

Membelajarkan konsep persamaan garis dapat diawali dari memecahkan permasalahan nyata berikut ini:

Ayah selalu mengajak kami berekreasi setiap hari Minggu mengunjungi berbagai tempat dengan mengendarai mobil. Amir mengamati bahwa pada setiap menit ayah mengendarai mobil dengan kecepatan yang selalu meningkat. Menurut pengamatan Amir, kecepatan mobil ayah sebagaimana disajikan dalam berikut ini.

Waktu Tempuh (Menit)	*0*	1	2	3	4	5	6	...
Kecepatan	*5*	15	25	35	45	55	65	...

Pertanyaan-pertanyaan yang dapat dikembangkan sehingga siswa mengonstruksi pengetahuannya adalah:

(1) Jika waktu tempuh dilambangkan dengan x menit dan kecepatan mobil dilambangkan f(x) km/jam, gambarlah grafik fungsi f(x) dalam koordinat Cartesius.
(2) Berupa apakah grafik fungsi f(x) tersebut?
(3) Berapa kecepatan mobil Ayah pada menit ke 7 dan 8?
(4) Lengkapilah tabel berikut ini.

Waktu Tempuh (Menit)	*0*	1	2	3	4	5	6	...
Kecepatan	*5 =10(0)+5*	15=10(1)+5	25=...(2)+5	35=...(3)+...	45-...(...) + ...	55 = ... + ...	65 = ...	...

(5) Tulislah rumus fungsi dari masalah di atas.
(6) Jika pada rumus fungsi f(x) diganti dengan y, apa yang dapat Anda peroleh?
(7) Rumus fungsi (f(x)) yang Anda peroleh disebut persamaan. Menurut Anda, apa kira-kira nama persamaan tersebut jika dilihat berdasar bentuk grafiknya? Jelaskan.

Selanjutnya, cara mengajarkan tentang menggambar grafik suatu persamaan garis lurus pada koordinat Cartesius dapat dilakukan dengan menggunakan tabel pasangan berurutan. Ditentukan paling sedikit dua titik yang memenuhi persamaan, kemudian dibuat garis lurus

melalui dua titik tersebut. Mahasiswa dapat mendemonstrasikan cara atau langkah-langkah dalam menggambar grafik persamaan garis lurus melalui contoh dan siswa menirukan membuat grafik pada buku catatan masing-masing.

Aktivitas 2. Menggambar Grafik Garis Lurus

Mahasiswa dapat mendemonstrasikan menggambar grafik persamaan garis lurus $y = 2x - 6$. Langkah awal yang dapat dilakukan adalah melakukan penghitungan:

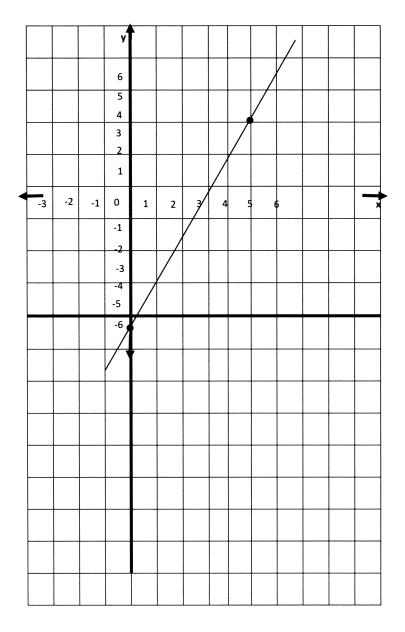
- Jika x = 0, maka y = -6. Sehingga titiknya adalah (0, -6)
- Jika x = 1, maka y = -4. Sehingga titiknya adalah (1, -4)
- Jika x = 3, maka y = 0. Sehingga titiknya adalah (3, 0)
- Jika x = 5, maka y = 4. Sehingga titiknya adalah (5, 4),
- Dan seterusnya.

Tabel pasangan berurutan adalah:

x	0	1	2	3	4	5
y	-6	-4	...	0	...	4
Titik (x, y)	(0, -6)	(1, -4)	(..., ...)	(3, 0)	(..., ...)	(5, 4)

Untuk menggambar grafik persamaan di atas, mahasiswa bisa menjelaskan bahwa minimal dipilih 2 titik yang digambarkan pada koordinat Cartesius, lalu dua titik tersebut dihubungkan dengan garis lurus. Alasan yang mendasarinya dapat diajukan sebagai bahan tanya jawab atau diskusi.

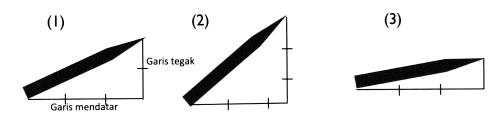
Dua titik yang dapat dipilih adalah, (0, -6) dan (5, 4).

Kemudian kedua titik dihubungkan dengan garis lurus.

Gambar 18. Grafik Garis Lurus $y = 2x - 6$

Selain dua titik yang diambil sebagai patokan menggambar grafik garis lurus di atas, dapat pula dipilih dua titik yang mempunyai sifat khusus, yaitu titik potong dengan sumbu x atau y = 0, yaitu (3, 0) dan titik potong dengan sumbu y atau x = 0, yaitu (0, -6).

Aktivitas 3. Mengonstruksi Pemahaman tentang Gradien Suatu Garis Lurus

Pemahaman tentang gradien garis lurus dapat dianalogkan dengan mengidentifikasi koefisien kemiringan suatu onjek yang diletakkan pada posisi tertentu. Untuk itu, pemahaman tentang konsep gradien dapat dikonstruksi dengan suatu pembelajaran dengan menggunakan media manipulatif berikut ini.

Andaikan sebatang pensil mewakili suatu garis lurus. Letakkan sebatang pensil di atas selembar kertas dengan posisi kemiringan berbeda. Lakukan dengan memiringkan ke kanan. Kemudian gambarkan garis lurus mendatar dari pangkal pensil dan garis lurus tegak pada ujung pensil sehingga dua garis lurus ini berpotongan dan saling tegak lurus. Ukurlah panjang kedua garis tersebut. Hitunglah perbandingan antara panjang garis tegak dengan panjang garis mendatar.

Gambar 19. Model Representasi Gradien Garis Lurus dengan Pensil

Lanjutkan dengan mengubah dengan berbagai posisi kemiringan pensil. Lakukan dengan kemiringan ke kiri.

Posisi Pensil	Panjang Garis Tegak	Panjang Garis Mendatar	Perbandingan Panjang Garis Tegak dan Garis Mendatar
(1)	2	3	2/3
(2)	...	2,5	... /2,5
(3)	...	...	... / ...
Dst			

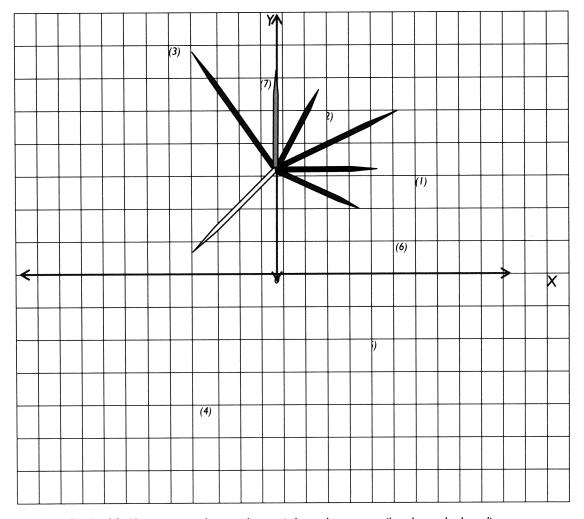
Alternatif materi pembimbingan

Ketahuilah bahwa perbandingan antara panjang garis tegak dan garis mendatar pada posisi kemiringan pensil adalah bilangan yang menunjukkan kemiringan pensil atau yang disebut sebagai gradien.

Andaikan pensil itu merupakan suatu ruas garis dan kemiringan pensil tersebut diistilahkan sebagai gradien, sebutkan dengan kata-kata sendiri pengertian gradien.

Gradien adalah ....
....
....

Lanjutkan untuk memperkuat pemahaman konsep "gradien"!

Siapkan kertas berpetak dan gambarkan sumbu koordinat XOY. Kemudian letakkan beberapa batang pensil di atas sumbu koordinat tersebut dengan kemiringan berbeda-beda. Letakkan pangkal pensil pada titik asal (0, 0), seperti pada gambar di bawah ini.

Gambar20. Merepresentasikan gradien garis lurus dengan pensil pada sumbu koordinat.

Amatilah kemiringan tujuh pensil yang telah diletakkan pada sumbu koordinat sebagaimana gambar di atas. Amati pula posisi ujung-ujung pensil. Tentukan posisi absis (komponen-x) dan ordinat (komponen-y) ujung tujuh pensil tersebut. Isilah data hasil pengamatan Anda pada tabel di bawah ini.

Pensil ke-	Perbandingan Panjang Garis Tegak dan Garis Mendatar	Posisi Ujung Pensil		Perbandingan Ordinat dan Absis	Gradien Pensil
		Ordinat	Absis		
(1)	3/6	.....	.....	3/6	1/2
(2)	.....	.....	.....	.....	.....
(3)	6/4	.....	-4	.....	-3/2
(4)	.....	.....	.....	.....	.....
(5)	.....	.....	.....	.....	.....
(6)	.....	0	.....	.....	.....
(7)	.....	.....	.....	.....	.....

Alternatif materi pembimbingan

Kemiringan ke kanan akan memberikan perbandingan panjang garis tegak dan garis mendatar bernilai positif dan sebaliknya kemiringan ke kiri akan bernilai negatif.

Rumuskan kesimpulan tentang gradien:

(1) Garis lurus dengan kemiringan ke kanan.

(2) Garis lurus dengan kemiringan ke kiri.

(3) Garis mendatar (horisontal).

(4) Garis tegak (vertikal).

Lanjutkan untuk memperkuat pemahaman konsep gradien garis lurus yang melalui dua titik!

Siswa dapat kembali memperhatikan kemiringan garis lurus pada sumbu koordinat yang dimodelkan sebagaimana gambar 20. Selain koordinat titik ujung pensil, siswa dapat kembali mengidentifikasi titik koordinat lain yang dilalui pensil (sebagai garis), lalu mengisi data hasil pengamatan pada tabel di bawah ini.

Pensil ke-	Gradien	*Posisi Ujung Pensil*		
		Koordinat Ujung	*Koordinat Titik Lain*	*Perbandingan Selisih Ordinat dan Absis*
(1)	*1/2*	*(6, 3)*	*(4, 2).*	*(3-2)/(6-4) = 1/2*
(2)	.....	.....	.....	.....
(3)	.....	.....	.....	.....
(4)	.....	.....	.....	.....
(5)	.....	.....	.....	.....
(6)	.....	.....	.....	.....
(7)	.....	.....	.....	.....

Alternatif materi pembimbingan

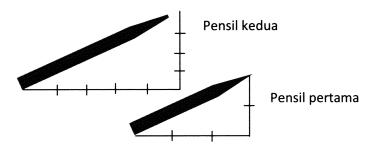
Bimbinglah mahasiswa untuk menyimpulkan bahwa koefisien arah garis yang melalui 2 titik adalah *perbandingan antara selisih ordinat dan selisih absis dari dua titik yang dilalui oleh garis lurus tersebut*, atau: $\frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}$.

(x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah dua titik yang dilalui oleh suatu garis lurus.

Aktivitas 4. Menemukan Hubungan Gradien Antara Dua Garis Lurus

Dua garis lurus dalam posisinya dengan kemiringan tertentu memiliki karakteristik istimewa apabila dua garis itu saling sejajar atau tegak lurus. Untuk itu, perlu ditemukan bagaimana hubungan gradien antara dua garis yang saling sejajar atau tegak lurus tersebut. Pembelajaran dengan media manipulatif berikut ini dapat diterapkan.

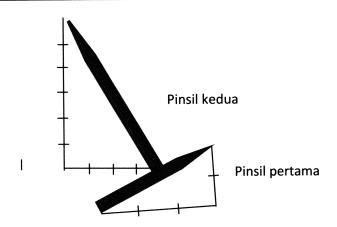
Siapkan 2 pensil, usahakan dengan panjang berbeda. Letakkan pensil pertama dengan kemiringan tertentu. Kemudian gambarkan garis lurus mendatar pada pangkal pensil dan garis lurus tegak pada ujung pensil sehingga dua garis lurus ini berpotongan dan saling tegak lurus (sebagaimana aktivitas 2 di atas). Ukurlah panjang dua garis tersebut. Hitunglah kemiringan pensil pertama ini.

Kemudian letakkan pensil kedua sejajar pensil pertama. Lakukan hal yang sama untuk menentukan kemiringan pensil kedua.

Gambar 21. Model Kemiringan Dua Garis Lurus yang Sejajar dengan Menggunakan Pensil

Berapa gradien atau kemiringan pensil pertama?
Berapa gradien atau kemiringan pensil kedua yang sejajar pensil pertama?
Selidikilah, apakah gradien atau kemiringan dua pensil tersebut sama?

*Andaikan pensil pertama merupakan ruas garis k dengan gradien m_1 dan pensil kedua sebagai ruas garis **l** dengan gradien m_2, tentu Anda dapat menyelidiki bahwa k sejajar dengan l, maka tuliskan hubungan m_1 dan m_2.*

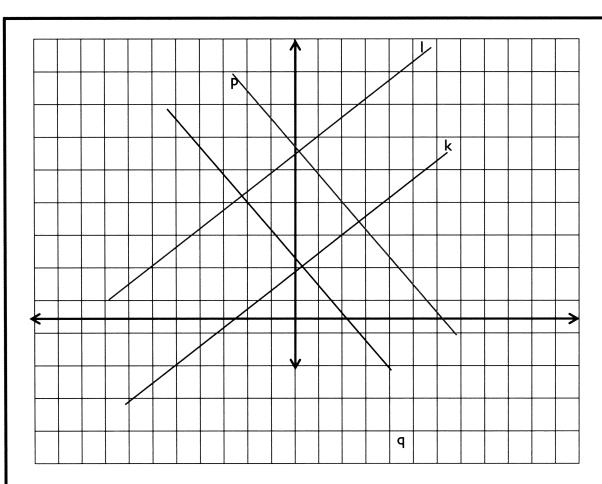
Jika garis *k* dengan gradien m_1 sejajar dengan garis *l* dengan gradien m_2, hubungan antara m_1 dan m_2 adalah ....

Selanjutnya, ubahlah kemiringan pensil kedua sedemikian hingga kedua pensil saling tegak lurus. Perhatikan bahwa pensil kedua miring ke kiri agar tegak lurus dengan pensil pertama.

Gambar 22. Model Kemiringan Dua Garis Lurus yang Tegak Lurus dengan Menggunakan 2 Pensil Sejajar

Berapa gradien atau kemiringan pensil kedua yang tegak lurus pensil pertama?
Selidikilah, apakah perkalian gradien (kemiringan) pensil pertama dan pensil kedua bernilai -1?
Andaikan pensil pertama merupakan ruas garis k dengan gradien m_1 dan pensil kedua sebagai ruas garis l dengan gradien m_2, tentu Anda dapat menyelidiki bahwa k dan l saling tegak lurus, maka tuliskan hubungan m_1 dan m_2.

Jika garis *k* dengan gradien m_1 tegak lurus dengan garis *l* dengan gradien m_2, hubungan antara m_1 dan m_2 adalah ....

Lanjutkan untuk memperkuat pemahaman konsep gradien garis lurus yang melalui dua titik!

Selidikilah hubungan gradien garis-garis yang saling sejajar atau yang saling tegak lurus yang digambarkan pada diagram Cartesius berikut ini.

Gambar 23. Garis-garis sejajar atau tegak lurus

Misalkan gradien garis *k*, *l*, *p*, dan *q* masing-masing adalah m_k, m_l, m_p, dan m_q, hitunglah:

m_k = ...

m_l = ...

m_p = ...

m_q = ...

Apakah $m_k = m_l$? Jelaskan alasan Anda.

Apakah $m_p \cdot m_k = -1$? Jelaskan alasan Anda.

Selain itu, garis-garis yang manakah yang memberikan gradien yang sama? Garis-garis manakah yang memberikan perkalian gradiennya bernilai -1? Jelaskan alasan Anda.

Pembimbingan oleh Dosen

Selidikilah apakah berlaku bahwa:

(1) Jika $m_a = m_b$, maka garis ***a*** sejajar dengan garis ***b***?

(2) Jika $m_a . m_b = -1$, maka garis ***a*** tegak lurus garis ***b***?

Persamaan garis lurus biasa disebut juga persamaan linier. Dalam aljabar disebutkan bahwa persamaan yang memiliki variabel dengan pangkat tertinggi adalah satu disebut sebagai persamaan linier. Dalam geometri disebut persamaan garis lurus karena grafiknya berbentuk garis lurus.

Aktivitas 5. Menemukan Persamaan Garis Lurus yang Melalui Satu Titik dengan Gradien m

Misalkan titik P adalah titik dengan koordinat (x_1, y_1). Sementara Q adalah titik dengan koordinat sebarang, misalnya (x, y) dengan PQ tidak sejajar sumbu x. Jika gradien garis yang melalui titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x, y)$ dinyatakan dengan m, pada garis PQ, selidikilah apakah semua titik (x, y) memenuhi hubungan:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Dapatkah Anda mengubah bentuk di atas menjadi bentuk linier? Tuliskan!
Bentuk aljabar yang Anda temukan di atas merupakan persamaan garis lurus yang melalui titik (x_1, y_1) dengan gradien m.

Untuk melatihkan pemahaman Anda, selesaikan soal-soal di bawah ini.

(1) Tentukan persamaan garis yang melalui titik (2, -3) dengan gradien = -3!

(2) Berapakah gradien garis lurus yang dinyatakan dengan persamaan 2y – 5x = 4? Sebutkan 3 titik yang dilalui garis tersebut!

Aktivitas 6. Menemukan Persamaan Garis Lurus yang Melalui Dua Titik

Pada aktivitas 5 di atas diharapkan bahwa para siswa menemukan bentuk aljabar

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Jika ditentukan bahwa garis PQ melalui dua titik yaitu (x_1, y_1) dan (x_2, y_2), selidikilah bahwa gradien garis ini dapat ditentukan dari hubungan:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Jika nilai m tersebut disubstitusikan pada bentuk $y - y_1 = m(x - x_1)$, temukanlah bentuk aljabar baru yang Anda bisa peroleh.

Bentuk aljabar tersebut merupakan persamaan garis lurus yang melalui 2 titik, yaitu (x_1, y_1)dan (x_2, y_2).

Untuk melatihkan pemahaman Anda tentang persamaan garis lurus yang melalui 2 titik, selesaikan soal-soal di bawah ini.

(1) Tentukan persamaan garis yang melalui titik (2, -3) dan titik (1, 1)!

(2) Tentukan persamaan garis yang melalui titik (0, 0) dan titik potong antara garis $y = 2x + 1$ dengan garis $y = x - 1$!

4.3 Melatihkan Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi

Melatihkan kemampuan berpikir tingkat tinggi dalam memecahkan masalah yang melibatkan persamaan garis lurus dapat dikembangkan dalam pembelajaran ini. Untuk itu, dapat dirancang masalah-masalah matematika yang melibatkan konsep persamaan garis lurus dan beberapa konsep matematika lainnya yang terkait. Beberapa strategi yang disarankan agar mahasiswa memiliki kemampuan mengembangkan masalah-masalah matematika yang melibatkan kemampuan berpikir tingkat tinggi adalah:

1) Buatlah permasalahan nonrutin atau soal yang tidak dapat diselesaikan dengan menerapkan secara langsung konsep dan prinsip persamaan garis lurus dengan sifat-sifat gradiennya.
2) Pikirkan bahwa untuk menyelesaikannya membutuhkan kemampuan mengaitkan antar berbagai konsep matematika.
3) Libatkan kemampuan berpikir analitik secara aljabar dan geometri untuk penyelesaian masalah yang dibuat.
4) Pikirkan pertanyaaan-pertanyaan dalam masalah yang Anda rancang yang penyelesaiannya memerlukan strategi penalaran secara logis dan menghubungkan antar berbagai hal (konsep dan prinsip matematika).
5) Berlatihlah menyelesaikan berbagai masalah matematika, kemudian kembangkan masalah yang sudah Anda selesaikan dengan menggunakan penalaran logis.
6) Pikirkan bahwa masalah yang Anda rancang adalah soal-soal matematika pada level menalar, menganalisis, menyintesis, mengevaluasi, dan membutuhkan kemampuan berpikir kreatif.

Aktivitas 7. Memecahkan Masalah Berkaitan Persamaan Garis Lurus

Beberapa permasalahan yang melibatkan kemampuan berpikir tingkat tinggi dicontohkan berikut ini. Diskusikan dan selesaikan.

1. Dua ekor semut berjalan pada bidang XOY, lintasan yang dilalui oleh dua semut tersebut membentuk garis lurus, melalui titik (3,2), dan saling tegak lurus.
   a. Tentukan masing-masing dua persamaan garis berbeda yang dilalui oleh dua semut itu.
   b. Jika semut pertama berjalan menuju ke titik (-1, 4), tentukan persamaan lintasan yang dilalui semut kedua.
   c. Apakah lintasan semut pertama melalui titik (1, 5) jika semut kedua berjalan menuju titik (6, 5)?
2. Panjang jalan tol Bogor-Jakarta 60 km. Pada pukul 12.00, mobil A berangkat dari pintu tol Bogor menuju Jakarta dengan kecepatan rata-rata 80 km/jam. Pada saat yang sama, mobil B berangkat dari pintu tol Jakarta menuju Bogor dengan kecepatan rata-rata 70 km/jam.
   a. Tentukan persamaan lintasan(jarak tempuh) kedua mobil terhadap waktu.
   b. Pada pukul berapa dua mobil tersebut akan berpapasan?

4.4 Asesmen

Berdasar alternatif aktivitas pembelajaran yang diuraikan di atas yang diarahkan pada pembentukan pengetahuan faktual, pemahaman konsep, dan pemecahan masalah, maka pencapaian tujuan pembelajaran materi persamaan garis lurus dapat diukur dengan menggunakan indikator pencapaian sebagai berikut:

1) Dapat menyusun persamaan garis lurus yang melalui dua titik dan menggambarkan pada sumbu koordinat.
2) Dapat menentukan gradien dari suatu persamaan garis lurus.
3) Dapat menyusun persamaan garis lurus yang melalui satu titik dengan gradien tertentu dan menggambarkan pada sumbu koordinat.
4) Dapat menyebutkan hubungan gradien antara dua garis yang saling sejajar.

5) Dapat menyebutkan hubungan gradien antara dua garis yang saling tegak lurus.
6) Dapat menerapkan prinsip persamaan garis lurus, gradien, dan hubungan gradien antara dua garis lurus dalam memecahkan masalah matematika.

Pencapaian-pencapaian ini dapat diukur dan dinilai selama pembelajaran melalui observasi, wawancara, dan portofolio. Penilaian produk berbasis kinerja dapat dilakukan diakhir pembelajaran dalam bentuk tes hasil belajar, proyek dan investigasi matematika, serta portofolio,

Apabila satu atau beberapa indikator pencapaian hasil belajar tidak tercapai selama proses dan akhir pembelajaran maka dapat digunakan alternatif aktivitas pembelajaran yang lain dengan merancang konteks permasalahan matematika yang lain yang lebih mudah dipahami.

Evaluasi

Contoh soal berkaitan materi tentang persamaan garis lurus yang dapat digunakan untuk mengukur ketercapaian tujuan pembelajaran adalah:

Garis f melalui titik (1, 5) dan (2, 8). Garis g bergradien 3 dan melalui titik (3, 14) serta garis h tegak lurus garis f dan melalui titik (-4, 7).

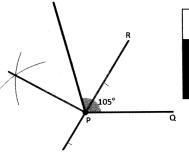
(1) Tentukan persamaan garis f, garis g, dan garis h.

(2) Apakah garis g sejajar atau tegak dengan garis f?

(3) Apakah garis h sejajar atau tegak lurus garis g?

(4) Tuliskan semua garis yang sejajar dengan garis h!

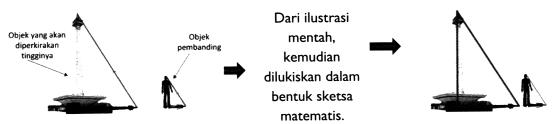
Refleksi...!!!

Apabila satu atau beberapa indikator pencapaian hasil belajar tentang persamaan garis lurus tidak tercapai selama proses dan akhir pembelajaran, dosen dapat merancang alternatif aktivitas pembelajaran yang lain dengan merancang konteks permasalahan matematika lain yang lebih mudah dipahami.

GEOMETRI

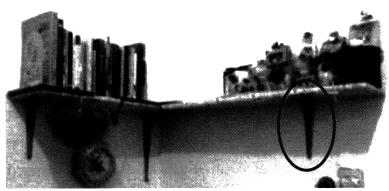
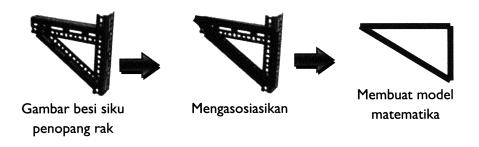
1. Pengantar

Mempelajari geometri seperti mempelajari kehidupan. Nyaris tidak ada bagian di kehidupan ini yang tidak bersentuhan dengan geometri. Sebagai ilustrasi, seorang tuan tanah yang mungkin tak pernah belajar geometri pasti akan ditanya oleh pembeli tentang luas tanah yang akan dijualnya. Praktis, dia akan bersentuhan dengan geometri, dalam hal ini adalah luas daerah bangun datar. Demikian pula ketika seseorang bermaksud membeli air. Perhitungan harga air yang dibuat juga berdasar volume air yang dibeli.

Pernahkah terpikir bagaimana Saudara mengetahui tinggi Monas tanpa harus membawa meteran hingga puncak menara? Atau, apa yang Saudara lakukan saat seseorang meminta Saudara mengukur tinggi tiang bendera, sementara Saudara hanya punya meteran pengukur panjang?

Matematika memiliki caranya sendiri dalam menyelesaikan masalahmu. Cukup kau ambil alatmu, kau cari teman yang bisa membantumu menemukan solusinya. Bagaimana bisa? Ternyata kesebangunan bisa menyelesaikannya. Mari kita lihat ilustrasi berikut.

Gambar Mentah Permasalahan Kontekstual

Sketsa Matematis dari Masalah Konteks

Dari ilustrasi gambar di atas, kita dapat memperkirakan tinggi Monas secara sederhana dengan cara membandingkan ukuran panjang bayangan yang terjadi.

Atau pernahkah menemui kasus, saat memasang rak buku dan rak yang dipasang tidak rata. Indikasinya adalah buku yang diletakkan di atas rak sering melorot dan jatuh. Dapatkah pengambilan putusan tentang kerataan rak bukunya ditentukan dari hasil perhitungan kuadrat panjang *hipotenusa* dan kuadrat panjang sisi siku-siku dari model segitiga penopang besi miliknya sebagaimana ilustrasi berikut? *(Mengapa?)*

Cerita tersebut menampakkan bahwa matematika sangat berhubungan dengan kehidupan. Untuk mempermudah pemahaman atas geometri, ruang lingkup materi geometri disajikan pada diagram berikut.

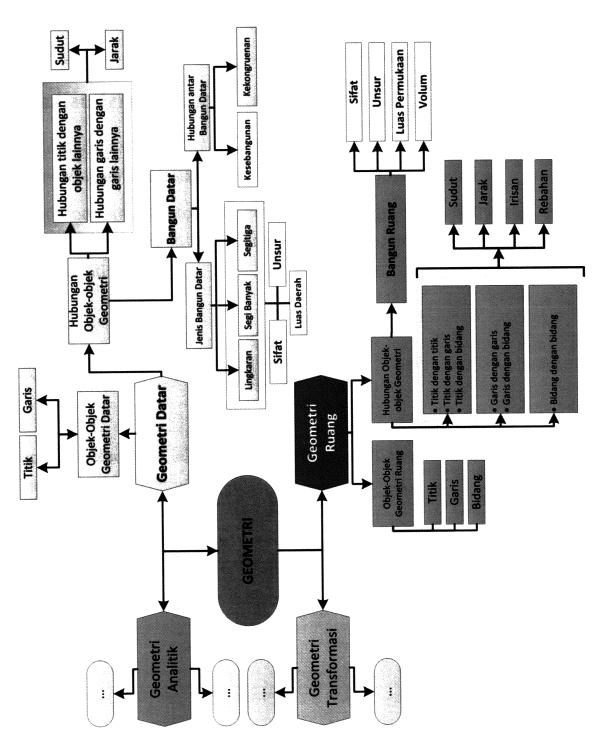



Diagram 1. Peta Konsep Materi Geometri

Pada buku ini akan dibahas geometri terkait dengan kesebangunan, bangun datar, serta bangun ruang dan sifatnya. Tiga hal tersebut dipilih mengingat siswa sering mengalami masalah dalam pembelajarannya.

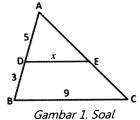
Pertanyaan untuk didiskusikan!

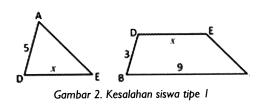
- *Dari ilustrasi tentang Monas, berapa kawankah yang kau butuhkan untuk membantumu memperkirakan tinggi Monas?*
- *Bagaimana seorang ilmuwan memperkirakan volume matahari?*
- *Bagaimanakah menurutmu mengetahui luas daerah benda-benda berikut ini?*

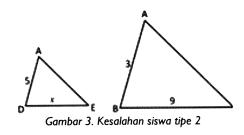
- *Apakah pertanyaan sebelum ini merupakan kajian geometri bangun datar?*

2. Kesebangunan

2.1 Kesalahan Pemahaman Konsep

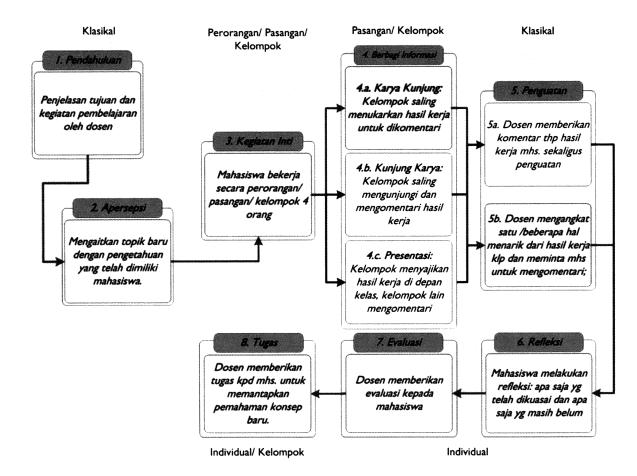
Berdasar identifikasi di sekolah, ditemukan bahwa pemahaman yang sepotong pada siswa mengakibatkan kesalahan pemahaman konsep, sebagaimana rangkaian pada gambar 1, 2, dan 3. Beberapa siswa masih melakukan proses sebagai berikut: $\frac{5}{3} = \frac{x}{9}$. Kesalahan dasar ini disebabkan pada saat memisahkan gambar yang terjadi adalah sebagaimana terjadi dalam ilustrasi gambar 2.

Gambar 1. Soal kesebangunan

Kesalahan pemahaman konsep tidak berhenti pada tahap di atas. Ketika siswa telah berhasil memisahkan segitiga di Gambar 1 menjadi proses di Gambar 3, masih ada siswa yang melakukan kesalahan dasar dengan menulis ukuran panjang ruas garis AB adalah 3, yang seharusnya adalah 8.

Gambar 2. Kesalahan siswa tipe 1

Buku ini hadir bukan bermaksud untuk membahas mengenai kesalahan konsep yang terjadi di sekolah. Namun, berangkat dari kesalahan konsep yang mungkin terjadi di sekolah, perlu ada perkuliahan materi kesebangunan yang mampu mengatasi permasalahan tersebut di atas. Dengan rancangan aktivitas mahasiswa, perkuliahan akan berlangsung secara aktif, mahasiswa melakukan investigasi, menemukan dan merancang teori, dan akhirnya akan membangun suatu sistem dalam diri mahasiswa yang menetap. Dampak yang diinginkan adalah ketika menyampaikan materi kesebangunan, mahasiswa yang bersangkutan akan mengingat pemodelan yang dilakukan dosen dan pada akhirnya kesalahan pemahaman konsep ini tidak lagi terjadi.

Gambar 3. Kesalahan siswa tipe 2

Jelas, dengan mempelajari geometri, seseorang akan dapat menghitung jarak, melakukan prediksi atas volume, luas, dan jarak, serta berbagai aplikasi lainnya yang berhubungan dengan jarak, kedudukan benda, luas, dan volume.

2.2 Proses Pembelajaran

Merujuk pada pola umum skenario pembelajaran yang dijelaskan pada bab II, skenario pembelajaran untuk topik 'Kesebangunan' ini tergambar pada diagram berikut dengan petak-petak berwarna kuning.

Gambar Diagram Alur Pembelajaran 'Kesebangunan'

Keterangan:

1. **Pendahuluan**

   Dosen menyampaikan tujuan dan kegiatan yang akan dilakukan dalam perkuliahan:

a) Mahasiswa memahami prinsip kesebangunan dua segitiga.

b) Mahasiswa mengetahui sebab-sebab kesebangunan dua segitiga.

2. **Apersepsi**

   Aktivitas 1

   Secara berpasangan, mahasiswa diminta membangun segitiga dari dua sudut yang diketahui ukurannya *(lihat aktivitas 1)*.

3. **Kegiatan Inti** (Kerja berpasangan/ kelompok)

   Aktivitas 2: Melukis segitiga.

   Secara berpasangan, mahasiswa ditugaskan untuk melukis segitiga dengan besar sudut 105° dan 60°*(lihat aktivitas 2)*.

   Jika aktivitas 2 tidak dapat diselesaikan, *scaffolding* berupa aktivitas perancah, melukis sudut (tak) istimewa, dapat dilakukan (*lihat perancah aktivitas* 2).

   Aktivitas 3: Sebab-sebab kesebangunan dua segitiga.

   Dengan investigasi, mahasiswa menemukan sebab-sebab dari kesebangunan dua segitiga, yaitu (1) ukuran besar sudut yang berkorespondensi, sama (Sd-Sd) dan (2) ukuran panjang sisi yang berkorespondensi, sebanding *(lihat aktivitas 3)*.

4. **Karya Kunjung**

   Kelompok saling menukarkan hasil kerja untuk dikomentari. Komentar difokuskan pada:

   - Apakah dua segitiga yang diidentifikasi benar sebangun?
   - Apakah ciri-ciri kesebangunan dua segitiga teridentifikasi dengan benar?

5. **Penguatan**

   Dosen mengangkat satu/ beberapa hal menarik dari hasil kerja kelompok, misalnya hasil karya lukisan segitiga tidak sesuai, dan meminta mahasiswa untuk berkomentar.

6. **Refleksi**

   Mahasiswa melakukan refleksi. Refleksi difokuskan kepada:

   - apa saja yang telah mereka kuasai, dan
   - apa saja yang masih belum dipahami.

7. Evaluasi

Dosen memberikan evaluasi berupa salah satu dari soal yang meangang mahasiswa berpikir tingkat tinggi (lihat butir evaluasi).

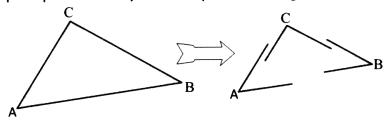
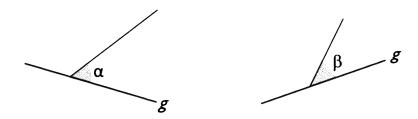
8. Tugas

Dosen memberi tugas kelompok untuk menentukan tinggi tiang bendera di kampus menggunakan prinsip kesebangunan.

Aktivitas-Aktivitas Pembelajaran

Berikut adalah aktivitas-aktivitas yang dilaksanakan pada pembelajaran kesebangunan di atas.

Aktivitas 1: Membangun Segitiga dari Dua Sudut

Segitiga ABC dapat dipisahkan menjadi beberapa sudut sebagai mana ilustrasi di bawah.

Diberikan dua sudut α dan β serta garis gsebagai berikut:

Dengan memindahkan sudut αatauβ, pada garis g, bangunlah sebuah segitiga yang besar dua dari tiga sudut di antaranya tersebut di atas!

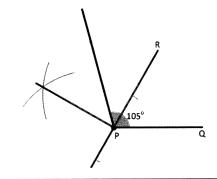
Petunjuk untuk Dosen

Aktivitas tersebut di atas ditujukan agar mahasiswa paham bahwa ***melalui dua sudut****,yang jumlah besar sudutnya kurang dari 180° dan tidak bersisian,* ***dapat dibangun sebuah segitiga****. Aktivitas 1 mengharuskan mahasiswa untuk paham bagaimana memindahkan sudut. Keberhasilan proses tersebut ditunjukkan dengan suksesnya mahasiswa melukis segitiga yang dimaksud.*

Aktivitas 2: Melukis Segitiga

Tugas Utama:

Lukiskan sebuah segitiga yang dua sudut di antaranya memiliki besar 105° dan 60° pada sebuah lembar kosong tanpa menggunakan alat ukur sudut.

Petunjuk untuk Dosen!

Melukis sudut 105° dapat dilakukan dengan melukis sudut siku-siku di P, kemudian dibagi menjadi 2 sudut yang kongruen.

Petunjuk untuk Dosen

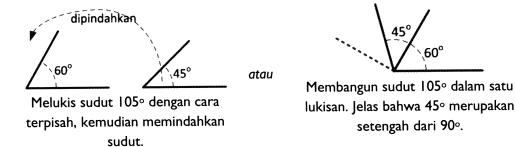
1. *Pada prinsipnya segitiga yang dibangun tidak harus berukuran sudut sebagaimana pada aktivitas 3. Segitiga yang dimaksud harus seragam. Ukuran* **105° dan 60°** *hanya satu contoh sudut istimewa dan kombinasinya.*
2. *Dengan* ***tidak*** *memberikan aturan ukuran panjang sisinya, diharapkan akan muncul beraneka ragam ukuran segitiga dengan sudut yang ditentukan.*

Aktivitas 2 ini dapat dilaksanakan dengan pemecahan masalah menurut Polya, dengan tahapan:

1) Memahami masalah

Inti permasalahan yang terjadi pada tahap ini adalah mahasiswa harus tahu cara membangun sudut dengan besar 105°. Jelas mahasiswa telah mengetahui cara membuat sudut dengan besar 60°. Pemahaman mahasiswa berikutnya, selain sudut, mereka harus memiliki ruas garis untuk membangun sebuah segitiga.

2) Merencanakan pemecahan

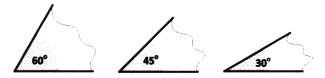
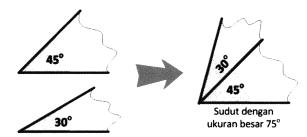
Tujuan yang ingin dicapai pada tahap ini adalah mahasiswa mampu melihat bahwa sesungguhnya sudut dengan besar 105° dapat diperoleh dari sudut 60° dan 45°. Mereka dapat membuat secara terpisah, kemudian memindahkan sudutnya ataupun digabung dalam sekali lukis, sebagaimana tampak dalam ilustrasi berikut.

Gambar Ilustrasi Rencana Mahasiswa dalam Menyelesaikan Permasalahan

Pada proses ini mahasiswa diminta berdiskusi dengan rekan sebelahnya atau dalam kelompok kecil agar waktu perencaan pemecahan masalah dapat lebih singkat. Selain merencanakan melukis sudut, mahasiswa harus merencanakan ukuran panjang ruas garis yang harus dibuat. Saat ini mahasiswa belum disampaikan progres selanjutnya setelah kegiatan ini tercapai.

Catatan untuk Dosen

Jika kegiatan ini tidak sukses, *yaitu mahasiswa tidak dapat melukis sudut tersebut,* ***bantulah*** *mahasiswa dengan* ***kegiatan perancah berikut ini.***

Perancah Aktivitas 2: Melukis Sudut (Tak) Istimewa

Lukiskan sudut 60°, 45°, dan 30°, kemudian potonglah sebagian daerah sudut istimewa tersebut.

Dengan menempelkan dua potongan sudut yang tersedia, kamu dapat memperoleh sudut dengan ukuran besar 75°?

1. Dengan cara yang sama, bagaimanakah kamu membuat sudut dengan ukuran besar 135°?
2. Dengan cara yang sama, bagaimanakah kamu membuat sudut dengan ukuran besar 105°?
3. Bagaimanakah kamu membuat sudut dengan ukuran besar 82,5°? *(Petunjuk: Saudara diperbolehkan untuk melipat sudut berdasar garis bagi sudutnya)*
4. Bagaimanakah kamu membuat sudut dengan ukuran besar 67,5°? *(Petunjuk: Saudara diperbolehkan untuk melipat sudut berdasar garis bagi sudutnya)*

Berdasar kegiatan tersebut,

1. Dapatkah kamu membuat sudut dengan ukuran besar tidak istimewa tanpa menggunakan alat ukur sudut?
2. Tulislah segala ukuran besar sudut yang tak istimewa, yang mungkin kamu buat tanpa menggunakan alat ukur sudut!

Aktivitas perancah dimaksudkan untuk membangkitkan kreativitas mahasiswa, sekaligus memahamkan mahasiswa bahwa sudut-sudut yang tak istimewa dapat dilukis tanpa menggunakan alat ukur sudut. Prinsip yang digunakan adalah memindahkan sudut dan atau membuat garis bagi sudut. **Aktivitas perancah ini tidak perlu dilakukan jika mahasiswa sudah dapat langsung melaksanakan aktivitas 2.**

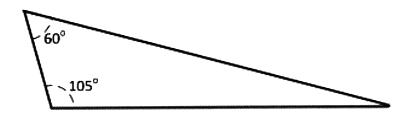
3) Melaksanakan rencana

Untuk melaksanakan rencana pemecahan masalah, mahasiswa bekerja mandiri pada lembar aktivitas atau buku kerja masing-masing dengan tetap berdiskusi dengan teman di sebelahnya. Untuk mempercepat proses dosen dapat memilih beberapa mahasiswa yang telah selesai untuk menjadi katalis di kelompok mahasiswa lainnya.

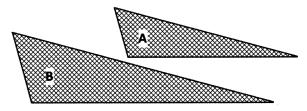
4) Melihat kembali hasil yang diperoleh

Pada tahap ini, mahasiswa dapat menggunakan alat ukur sudut untuk memeriksa apakah sudut yang dibuat sudah benar. Jika dirasa kesalahannya terlalu besar, mahasiswa diminta mengulang prosesnya.

Beberapa kesalahan yang mungkin terjadi antara lain:

- *Sudut yang dibuat kurang akurat. Hal ini mungkin disebabkan ujung pensil yang tak runcing.*
- *Ukuran panjang sisi segitiga terlalu besar sehingga kertas yang digunakan tidak cukup.*

Contoh gambar segitiga yang dibuat oleh mahasiswa hasil aktivitas 2

Aktivitas 4: Sebab-Sebab Kesebangunan Dua Segitiga – Penemuan/Investigasi

Peralatan: serupa dengan aktivitas 4, dengan mengeliminasi segitiga C.

Kegiatan:

1. Berilah indeks a, b, c di segitiga A dan k, ℓ, m di segitiga B untuk masing-masing sisi yang bersesuaian.
2. Berilah indeks α, β, dan γ untuk sudut-sudut yang bersesuaian.

Jelas segitiga A dan segitiga B sebangun.

3. **Dengan menghimpitkan sudut-sudut yang bersesuaian, bagaimanakah kamu menyatakan dua segitiga tersebut sebangun?**
4. Ukurlah panjang sisi-sisi yang bersesuaian kemudian masukkan dalam tabel berikut:

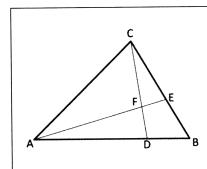
Ukuran panjang sisi segitiga A	Ukuran panjang sisi segitiga B yang seletak	Nilai r (ukuran panjang sisi segitiga A dibagi dengan ukuran panjang segitiga B

5. Perhatikan nilai r, apa yang dapat kamu katakan tentang nilai r?
6. **Dengan melihat nilai r, bagaimana kamu menyatakan dua segitiga tersebut sebangun?**
7. Menurut Saudara, apa yang mungkin akan terjadi pada segitiga B jika nilai **r diperkecil**?
8. Sebutlah nilai r adalah rasio. Menurut Saudara, apa yang terjadi pada kedua segitiga jika r = 1?

Catatan untuk Dosen

Tujuan dari tahap ini adalah memberikan pemahaman mengapa dua segitiga dikatakan sebangun. Nilai r yang ditemukan lazimnya merupakan pendekatan karena galat di alat tulis dan sebagainya.

Evaluasi

Kegiatan ini dimaksudkan untuk mengetahui seberapa dalam mahasiswa memahami kesebangunan. Kembali kepada pemecahan masalah yang bersifat terbuka (*open-ended problems*), mahasiswa diminta mengerjakan tugas sebagai berikut:

Perhatikan gambar di samping!
Dengan memperpanjang sisi atau membangun garis yang sejajar dengan sisi segitiga, bangunlah segitiga yang sebangun dengan:

(1) Segitiga CFE;
(2) Segitiga ABE;
(3) Segitiga AFD;
(4) Segitiga CBD.

2.3 Asesmen

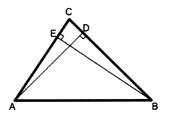
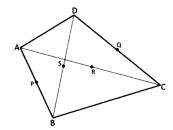
Untuk mengetahui keberhasilan pembelajaran, berdasar aktivitas-aktivitas dalam topik ini, dosen perlu memeriksa beberapa hal berikut:

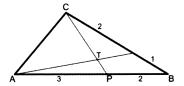
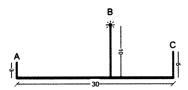
1) Mahasiswa dapat mengonstruksi segitiga hanya dengan diberikan dua sudut yang diketahui, ditunjukkan dengan:
   a) Mahasiswa dapat melukis sudut-sudut isimewa dan kombinasinya.
   b) Mahasiswa dapat melukis segitiga dengan dua sudut yang telah ditentukan.
   Jika tidak lancar atau gagal, ingatkan mahasiswa tentang teorema bahwa jumlah ukuran besar sudut pada sebuah segitiga adalah $180°$ sehingga dengan diberikan dua sudut tentunya dapat dilukiskan segitiga yang dimaksud.
2) Mahasiswa memahami prinsip sebangun pada segitiga, ditunjukkan dengan:
   a) Mahasiswa dapat segera menyebutkan sebangun/ tak sebangun jika diberikan dua segitiga.
   b) Mahasiswa dapat segera menyebutkan sebangun/tak sebangun jika diberikan dua bangun datar selain segitiga.
3) Mahasiswa dapat dengan tepat menyampaikan sebab-sebab kesebangunan dari dua segitiga, ditunjukkan dengan:
   a) Mahasiswa dapat menyebutkan sudut-sudut yang seletak dan kongruen.
   b) Mahasiswa dapat menyebutkan sisi-sisi yang seletak dan sebanding.

2.4 Contoh Soal Berpikir Tingkat Tinggi

1. Jika AD dan BE keduanya adalah garis tinggi segitiga ABC, buktikan bahwa

$$|CD|\times|CB| = |CE|\times|CA|$$

Perhatikan gambar di samping!

2.

Perhatikan gambar di samping!
Dipunyai segiempat ABCD. Titik tengah ruas garis AB, CD, BD, dan AC adalah P, Q, R, dan S. Buktikan bahwa ruas garis PQ dan RS berpotongan tepat di tengah!

3. Temukan perbandingan panjang ruas garis CT dan CP pada gambar di samping!

4.

Perhatikan gambar situasi berikut!

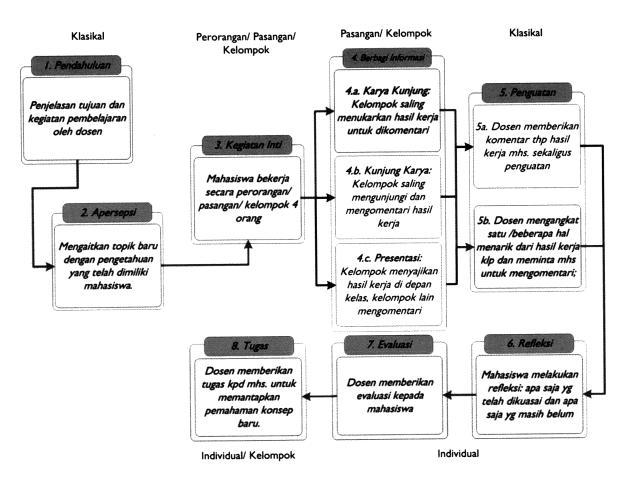
Di ujung tiang B dipasang lampu yang menyala terang. Jika pada malam hari panjang bayangan tiang A sama dengan panjang bayangan tiang C oleh lampu B, tentukan jarak tiang A dan tiang B! *(dalam meter)*

3. Bangun Datar

3.1 Fakta Pembelajaran

Hasil identifikasi dan pengamatan guru menyebutkan bahwa di lapangan adalah sebagian guru langsung memberikan rumus untuk menghitung luas bangun datar, tanpa mengajarkan proses penemuan rumus tersebut. Selain itu, ketika sampai pada masalah sifit-sifat bangun datar, sebagian guru masih kesulitan ketika menyajikan topik tersebut dengan pembelajaran aktif.

3.2 Proses Pembelajaran

Merujuk pada pola umum alur pembelajaran yang dijelaskan pada bab II, pembelajaran untuk topik 'Bangun Datar' ini tergambar pada diagram berikut dengan petak-petak berwarna kuning.

Gambar Diagram Alur Pembelajaran 'Bangun Datar'

1. Pendahuluan

Dosen menyampaikan tujuan dan kegiatan yang akan dilakukan dalam perkuliahan, yaitu:

a) Mahasiswa memahami sifat-sifat bangun datar segiempat.

b) Mahasiswa memahami luas daerah bangun datar.

2. Apersepsi

a) Mahasiswa mengingat kembali unsur-unsur bangun datar *(lihat aktivitas 1).*

b) Mahasiswa mengingat kembali hubungan antarunsur bangun datar *(lihat aktivitas 1).*

3. Kegiatan Inti

Mahasiswa memahami sifat-sifat bangun datar dan luas daerah segiempat dengan kegiatan pasangan/kelompok sebagai berikut:

Aktivitas 2: Dengan diskusi berpasangan, mahasiswa dapat menemukan sifat-sifat segiempat. Aktivitas 2 dilakukan dengan investigasi *(lihat aktivitas2).*

Aktivitas 3: Masih dengan berpasangan, mahasiswa dapat menemukan hubungan antar bangun datar segiempat yang diketahui *(lihat aktivitas3).*

Aktivitas 4: Berdasar luas daerah persegi panjang, mahasiswa dapat menemukan rumus luas daerah segitiga dan segiempat *(lihat aktivitas4).* Pada aktivitas 4 ini, mahasiswa juga dipahamkan mengenai prinsip kekonveksan bangun datar pada pertanyaan konsep.

4. Karya Kunjung

Kelompok saling menukarkan hasil kerja untuk dikomentari. Komentar difokuskan pada:

- Adakah sifat-sifat bangun datar yang berbeda?
- Apakah proses penemuan rumus luas daerah segitiga dan segiempat telah sesuai?

5. Penguatan

Dosen mengangkat satu/beberapa hal menarik dari hasil kerja kelompok, misalnya hasil karya lukisan segitiga tidak sesuai, dan meminta mahasiswa untuk berkomentar.

6. Refleksi

Mahasiswa melakukan refleksi. Refleksi difokuskan pada:

- apa saja yang telah mereka kuasai, dan
- apa saja yang masih belum dipahami.

7. Evaluasi

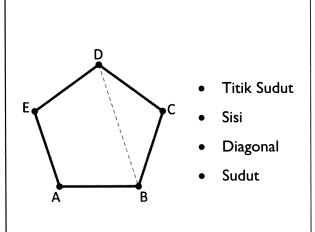
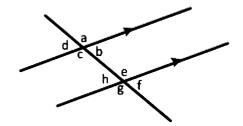
Dosen memberikan evaluasi berupa salah satu di antara soal yang mendorong mahasiswa berpikir tingkat tinggi (lihat butir evaluasi).

8. Tugas

Dosen memberi tugas individu maupun kelompok.

Aktivitas-Aktivitas Pembelajaran

Aktivitas 1: Mengingat Kembali Unsur-Unsur Bangun Datar

Pasangkan gambar dengan istilah yang ada di samping menarik garis di antara keduanya. Untuk bagian kanan, isilah titik-titiknya.

Sudut-sudut yang besarnya sama!

____

Sudut-sudut yang saling berpelurus!

____

Bangun di atas adalah salah satu contoh bangun datar segilima. Isilah tabel berikut dengan bangun datar segiempat yang Saudara ketahui.

No.	Sketsa Gambar	Nama Bangun Datar	No.	Sketsa Gambar	Nama Bangun Datar
1.			4.		
2.			5.		
3.			6.		

Petunjuk untuk Dosen

Aktivitas tersebut di atas dilakukan dengan diskusi berpasangan, ditujukan untuk mengeksplorasi ingatan dan pemahaman mahasiswa tentang unsur-unsur bangun datar lengkap dengan sketsanya. Aktivitas ini dianggap berhasil jika tidak ada lagi pertanyaan dari mahasiswa.

Aktivitas 2: Menyelidiki Sifat-Sifat Segiempat

1. Gambarkan suatu bangun jajargenjang, lalu ukurlah bangun yang telah Anda buat tersebut!

2. Ciri-ciri (sifat-sifat) bangun tersebut menurut: (coret yang tidak perlu)

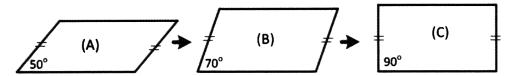
panjang sisi-sisi yang berhadapan	sama/tidak sama panjang
kedudukan sisi-sisinya yang berhadapan	sejajar/berpotongan tegak lurus/berpotongan tidak tegak lurus
kedudukan diagonal-diagonalnya	sejajar/berpotongan
....	....
....	....
....	....
....	....

3. Dengan tabel yang serupa, gambar dan buatlah tabel sifat-sifat bangun datar segi empat lainnya berdasar unsur-unsur bangun datar yang Saudara identifikasi!

Petunjuk untuk Dosen

Aktivitasdi atas dilakukan secara berpasangan agar mahasiswa dapat menemukan sifat-sifat dari seluruh segiempat dengan cepat.

Aktivitas 3: Menemukan Hubungan Antarsegiempat

Suatu persegi panjang dapat diperoleh dari proses berikut ini.

1. Dari proses tersebut, apakah persegi panjang merupakan jajargenjang?
2. Apa yang dapat Saudara katakan tentang persegi panjang dikaitkan dengan jajar-genjang?

Berdasarkan proses tersebut di atas, **tunjukkan**:

3. **apakah** belah ketupat juga merupakan jajargenjang?
4. **apakah** persegi juga merupakan jajargenjang?
5. **apakah** persegi juga merupakan persegi panjang?
6. **apakah** persegi juga merupakan belah ketupat?
7. **apakah** belah ketupat juga merupakan persegi panjang?

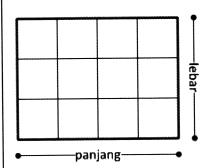
Tugas kelompok!

8. Buatlah diagram Venn yang menggambarkan hubungan antarsegiempat (jajargenjang, persegi panjang, dsb.) berdasar temuan kalian!

Petunjuk untuk Dosen

Setelah aktivitas, dosen dapat memberikan pertanyaan untuk memperoleh umpan balik mengenai ketercapaian aktivitas dengan pertanyaan seperti:
Jadi, apakah yang dimaksud dengan persegi panjang?
Jawaban yang diinginkan adalah:
"Persegi panjang adalah jajargenjang yang salah satu sudutnya 90°".

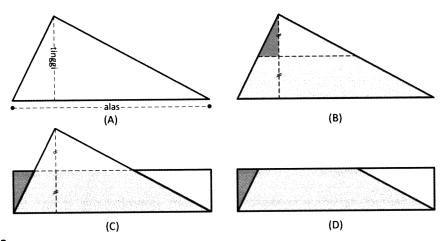
Aktivitas 4: Menemukan Luas Daerah Bangun Datar

Luas daerah persegi panjang diperoleh dari mencacah banyaknya persegi satuan seperti tampak pada gambar berikut.

Dengan mencacah persegi satuan, diperoleh luas daerah persegi panjang di samping adalah 12 satuan luas.

Pertanyaan 1:

Dari manakah bilangan 12 satuan luas itu diperoleh? (hubungkan dengan panjang dan lebar persegi panjang)

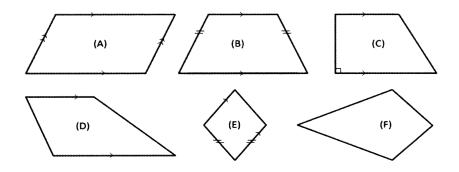
Pernyataan: 'Persegi satuan adalah persegi yang luas daerahnya 1 satuan luas' adalah suatu ***aksioma****.*
Kegiatan di atas merupakan dasar dari kegiatan berikutnya.

Untuk mengetahui bagaimana mencari luas daerah segitiga, dapat digunakan pendekatan luas daerah persegi panjang sebagai berikut.

Pertanyaan 2:

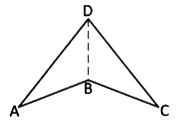
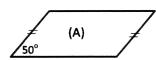
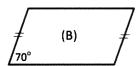
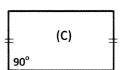
a. *Jika dikaitkan dengan alas dan tinggi segitiga (A), berapakah ukuran panjang dan lebar persegi panjang (D)?*
b. *Bagaimana luas daerah segitiga (A) dan luas daerah persegi panjang (D)?*
c. *Jadi, bagaimanakah rumus luas daerah segitiga?*

Tugas 1:
Gambarlah segitiga tumpul dan segitiga siku-siku. Pilihlah sisi, yang bukan sisi terpanjang, sebagai alasnya. Manipulasilah dua segitiga tersebut menjadi persegi panjang serupa dengan proses di atas!

Petunjuk untuk Dosen

Kegiatan di atas baru menemukan luas daerah segitiga. Kegiatan tersebut sebaiknya dilakukan dengan berkelompok sebanyak-banyaknya 3 mahasiswa. Berikut ini adalah bangun datar segiempat yang dicari rumus luas daerahnya berdasar luas daerah persegi panjang.

Tugas 2:
Carilah rumus luas daerah 6 segi empat tersebut di atas dengan pendekatan persegi panjang.

Pertanyaan Konsep
Pertanyaan 3:

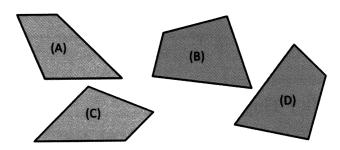
a. Apakah definisi layang-layang?
b. Apakah segiempat tersebut memenuhi syarat untuk disebut layang-layang?
c. Apakah segiempat pada gambar di samping ini merupakan layang-layang? Mengapa?

Pertanyaan 4:
Perhatikan tiga segiempat berikut!

Apakah tiga segiempat tersebut memiliki ukuran luas daerah yang sama? Jelaskan jawaban Saudara!

Petunjuk untuk Dosen

Untuk pertanyaan 3, silakan mencari referensi mengenai convexity *atau ke-konveks-an bangun datar. Pertanyaan 4 dapat dikembangkan, apakah parallelepipedum memiliki volum yang sama dengan sebuah balok?*

Evaluasi

Evaluasi 1:

Dua bangun datar dapat dikatakan memiliki luas yang sama jika ketika dua bangun tersebut diimpitkan dapat tepat saling menempati tempatnya *(lihat ilustrasi di bawah dan buktikan).*

Perhatikan pada persegi panjang di bawah ini.

a. Ada berapa banyakkah cara memotong persegi panjang tersebut agar diperoleh dua bangun datar yang luas daerahnya sama?
b. Adakah sifat yang kau temukan?
c. Jika keliling adalah jumlah ukuran panjang seluruh sisi bangun datar, bagaimanakah cara memotong persegipanjang tersebut agar diperoleh keliling bangun hasil potongan yang terkecil?

Evaluasi 2:

Luas daerah persegi diketahui memiliki rumus s $\times$ s, dengan s adalah ukuran panjang sisi persegi.

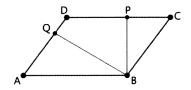
Tunjukkan bahwa luas daerah persegi tersebut dapat dinyatakan dengan setengah dari kuadrat panjang diagonalnya.

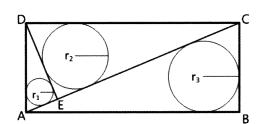
3.3 Asesmen

Mahasiswa dianggap memahami bangun datar bila menunjukkan hal-hal berikut:

1. Mampu mengidentifikasi unsur-unsur bangun datar.
2. Mampu mengidentifikasi kedudukan antar unsur bangun datar.
3. Mampu menemukan sifat-sifat bangun datar.
4. Mampu mengungkapkan hubungan antarbangun datar.
5. Mampu menemukan rumus luas daerah segitiga dan segiempat.
6. Mampu menjelaskan prinsip kekonveksan bangun datar.

3.4 Soal Berpikir Tingkat Tinggi

1. Perhatikan gambar jajargenjang di samping ini. Jika sudut BPC dan BQD siku-siku, BP = 4cm, DP = 4 cm, dan DC = 7 cm, tentukan panjang BQ!

2. Diketahui persegi ABCD dengan luas x^2, titik P terletak dalam persegi seperti tampak pada gambar di samping dengan jarak $PA = PB = PM$. Jika jarak tersebut dinyatakan dengan *y*, nyatakan *y* dalam *x*.

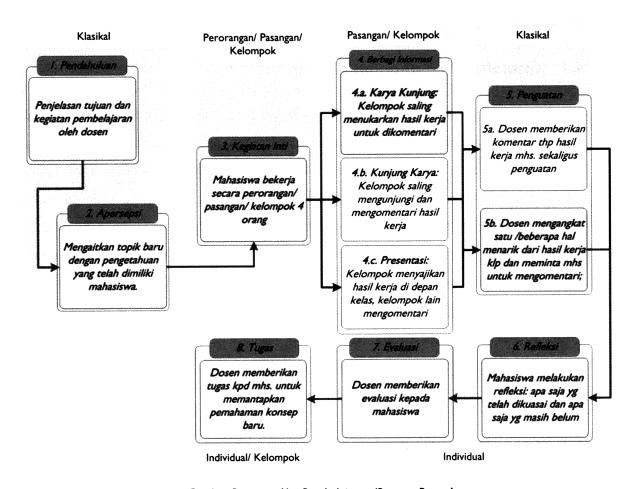
3. Diketahui persegi panjang ABCD dengan sisi AB = 12 cm dan AD = 5 cm, serta $DE \perp AC$ (lihat gambar di samping). Misalkan r_1 = jari-jari lingkaran dalam ΔAED, r_2 = jari-jari lingkaran dalam ΔCDE dan r_3 = jari-jari lingkaran dalam ΔABC.

Hitunglah $r_1 + r_2 + r_3$!

4. Bangun Ruang

4.1 Kesalahan Pemahaman Konsep

Fakta lapangan menunjukkan bahwa sebagian besar kajian pada bangun ruang sisi datar tidak mengalami masalah walaupun masih perlu pendalaman materi, terutama pada sifat-sifat bangun ruang sisi datar. Kesalahan pemahaman konsep pada topik bangun ruang banyak terjadi pada bangun ruang sisi lengkung seperti kerucut dan bola. Sebagai contoh, seringkali puncak dari bangun ruang kerucut dianggap sebagai titik sudut sehingga muncul pemahaman bahwa kerucut memiliki satu titik sudut. Kemudian, sering terjadi bahwa garis pelukis pada kerucut diidentifikasi sebagai sebagai rusuk sehingga pemahaman yang berkembang adalah kerucut memiliki dua rusuk. Demikian halnya dengan bola. Tidak banyak yang mengerti mengapa luas permukaan bola dirumuskan dengan $4\pi r^2$ atau mengapa volumenya $\frac{4}{3}\pi r^3$.

4.2 Proses Pembelajaran

Merujuk pada pola umum alur pembelajaran yang dijelaskan pada bab II, alur pembelajaran untuk topik 'Bangun Ruang' ini tergambar pada diagram berikut dengan petak-petak berwarna kuning.

Gambar Diagram Alur Pembelajaran 'Bangun Ruang'

Keterangan:

1. Pendahuluan

Dosen memberikan tujuan dan kegiatan yang akan dilakukan dalam perkuliahan, yaitu:

a) Mahasiswa memahami kerucut dan unsur-unsurnya.

b) Mahasiswa memahami hubungan antarbangun ruang.

2. Apersepsi

a) Mahasiswa mengingat kembali definisi dari unsur bangun ruang *(lihat aktivitas 1)*.

b) Mahasiswa mengingat kembali gambar unsur bangun datar *(lihat aktivitas 1)*.

3. Kegiatan Inti

Secara berpasangan/berkelompok, mahasiswa memahami kerucut dan unsur-unsurnya dengan kegiatan sebagai berikut:

Aktivitas 2.a.: Dengan diskusi berpasangan, mahasiswa mengenal jaring-jaring kerucut.

Aktivitas 2.b. : Masih dengan berpasangan, mahasiswa dapat menemukan unsur-unsur kerucut dan hubungannya. (Tujuan aktivitas 2.a. dan 2.b. adalah memberi pemahaman bahwa kerucut tidak memiliki titik sudut, berdasar definisi unsur bangun ruang yang diberikan).

Aktivitas 3: Mahasiswa berdiskusi (4-5 orang) menemukan hubungan antara sudut pusat lingkaran selimut (α), jari-jari lingkaran selimut (R), dan jari-jari lingkaran alas (r). Pada aktivitas ini, ada pemahaman yang diperlukan sebagai perancah, yaitu hubungan antara R, r, dan tinggi (t) kerucut. Namun, pemahaman perancah ini sederhana karena hanya menggunakan teorema Pythagoras.

Aktivitas 4: Mahasiswa mengetahui hubungan antarbangun ruang, terutama dalam kaitannya dengan volume bangun ruang. Misalnya, volume balok dapat diketahui dengan volume kubus satuan, atau volume limas adalah sepertiga dari volume balok, jika luas daerah alas dan tingginya sama, dan berbagai hubungan lainnya yang mungkin.

4. **Berbagi Informasi** (Karya Kunjung)

Kelompok saling menukarkan hasil kerja untuk dikomentari. Komentar difokuskan pada:

- Adakah sifat-sifat kerucut yang baru yang ditemukan?
- Bagaimana volume limas ditemukan?

5. Penguatan

Dosen mengangkat satu/beberapa hal menarik dari hasil kerja kelompok, misalnya sifat yang berbeda dan baru hasil temuan mahasiswa atau proses penemuan hubungan antara R, r, dan α yang menarik, serta meminta mahasiswa untuk mengomentari.

6. Refleksi

Mahasiswa melakukan refleksi berfokus pada:

- apa saja yang telah mereka kuasai, dan
- apa saja yang masih belum dipahami.

7. Evaluasi

Dosen memberikan evaluasi berupa salah satu dari soal yang mendorong mahasiswa berpikir tingkat tinggi.

8. Tugas

Dosen memberi tugas individu maupun kelompok.

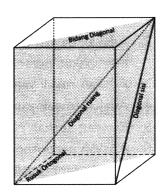
Aktivitas-Aktivitas Pembelajaran

Aktivitas I: Mengidentifikasi Definisi Unsur-Unsur Bangun Ruang

Dengan berpasangan, gambarkan definisi tersebut di bawah pada gambar model balok di sebelah kanan.

Pernyataan Definisi atau Nama Unsur	Gambar
A. Ruas garis yang merupakan perpotongan dua sisi. B. Bagian dari bidang yang membatasi bagian dalam dan luar bangun ruang. C. Pertemuan antara beberapa rusuk. D. Ruas garis pada sisi yang menghubungkan dua titik sudut tak serusuk. E. Ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut tak sebidang. F. Bagian dari bidang yang memuat diagonal ruang. G. Rusuk orthogonal.	

Petunjuk untuk Dosen

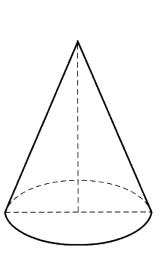
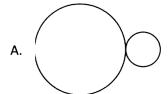
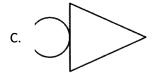
*Untuk memeriksa ketercapaian, dosen cukup memberikan tampilan/*slide *berupa gambar dan animasi pada bagian tertentu. Ambil acak mahasiswa untuk memeriksa hasil identifikasi mereka. Gambar yang disajikan ke mahasiswa dapat berupa sebagai berikut:*

Aktivitas 2.a.: Mengenal Kerucut dan Unsurnya

Perhatikan kerucut dan beberapa rebahan bangun ruang di bawah ini. Menurut Saudara, manakah yang merupakan jaring-jaring dari kerucut tersebut?

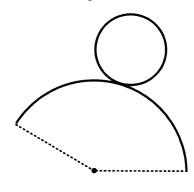
A.

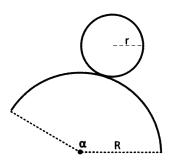
B.

C.

Petunjuk untuk Dosen

Untuk memastikan bahwa mahasiswa akan menjawab B, tugaskanlah agar mahasiswa membawa alat peraga jaring-jaring kerucut.

Aktivitas 2.b.: Mengenal Kerucut dan Unsurnya

Perhatikan gambar jaring-jaring kerucut berikut! Tunjukkan unsur-unsur yang ada dan pahami hubungan antar unsurnya dengan pertanyaan perancah!

1. Temukan sisi kerucut.
2. Adakah bagian dari jaring-jaring tersebut yang merupakan persekutuan dari sisinya?
3. Adakah rusuk yang terbentuk?
4. Adakah rusuk yang saling berpotongan?
5. Disebut apakah ruas garis putus-putus tersebut?
6. Apakah perpotongan ruas garis putus-putus tersebut merupakan titik sudut?

Aktivitas 3: Menemukan Hubungan Sudut Pusat dan Lingkaran Alas

Perhatikan gambar di samping. Diketahui bahwa:

R adalah ukuran panjang jari-jari lingkaran besar

r adalah ukuran panjang jari-jari lignkaran kecil

α adalah sudut pusat lingkaran besar

Busur α adalah busur di hadapan sudut α

Untuk memahami hubungan antara α dan r serta α dan R, berikut adalah pertanyaan perancah yang diperlukan.

Andaikan panjang busur α sama dengan keliling lingkaran kecil.

1. Jika r tetap dan R diperpendek, apakah yang akan terjadi pada α?
2. Jika R tetap dan r diperpendek, apakah yang akan terjadi pada α?
3. Apa yang harus Saudara lakukan jika menginginkan α lebih besar dari yang ada pada gambar?

Berdasar informasi perancah di atas, isilah tabel berikut dengan berbagai percobaan bilangan dan simpulkan hasilnya.

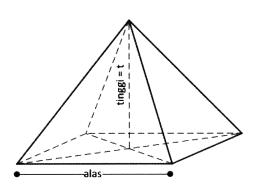
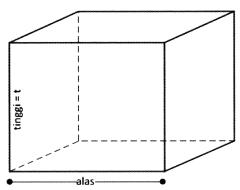
No.	R	r	α
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

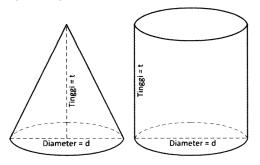
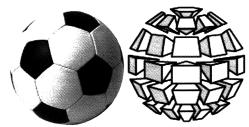
No.	R	r	A
6.			
7.			
8.			
9.			
10.			

Petunjuk untuk Dosen

Aktivitas 3 harus dilakukan secara berkelompok maksimal 5 orang agar dapat dilakukan lebih banyak percobaan. Pada beberapa kegiatan perkuliahan, kegiatan ini tidak berhasil. Hal tersebut tidak perlu dirisaukan karena menemukan hubungan antara R, r dan α tidak mudah dilakukan.

Aktivitas 4: Hubungan Antarbangun Ruang

Volume limas adalah $\frac{1}{3}\times$ luas daerah alas $\times$ tinggi prisma.
Perhatikan gambar limas dan balok berikut.

Diberikan limas dan balok yang masing-masing alasnya adalah segiempat yang kongruen. Tinggi limas sama dengan tinggi balok.

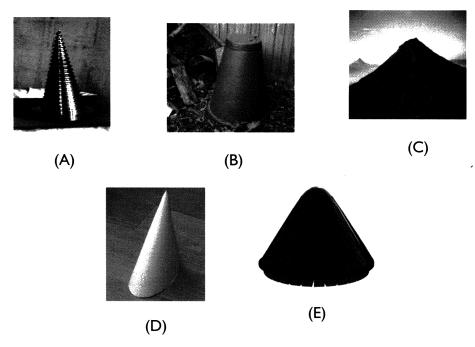
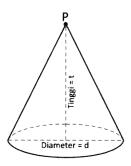
1. Tunjukkan bahwa balok tersebut dapat dibentuk menjadi 3 limas yang kongruen.
2. Bagaimanakah cara menunjukkan bahwa volum silinder tiga kali volum kerucut yang ukuran tinggi dan ukuran panjang diameter lingkaran alasnya sama?

3. Perhatikan gambar berikut!

Permukaan bola *(gambar kiri)* terdiri atas segilima *(hitam)* dan segienam *(putih)*.
Jadi, bagaimanakah bola berasal? Dari limas segilima dan limas segienam (gambar kiri) atau limas segiempat dan dua limas segi-n *(gambar kanan)*? Jelaskan!

Petunjuk untuk Dosen

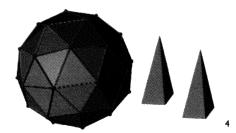
Sebagaimana dilihat pada aktivitas pembelajaran di atas bahwa mahasiswa diasumsikan telah memahami luas permukaan bangun ruang dan volume bangun ruang. Aktivitas ini memberi pengalaman yang nyata agar pemahaman yang telah dimiliki menjadi lebih mantap disimpan dalam memori.

Evaluasi

1. Perhatikan gambar di bawah ini!

   Identifikasilah benda-benda yang merepresentasikan kerucut dan jelaskan mengapa!

2. Apakah kerucut memiliki titik sudut? Mengapa?
3. Disebut apakah titik P pada gambar di bawah ini?

Gambar (A): encrypted-tbn2.gstatic.com
Gambar (B): eatlocal.wordpress.com
Gambar (C): ilhammaulanashidiq10.blogspot.com
Gambar (D): ww.korthalsaltes.com
Gambar (E): inhabitat.com

4. Apakah hubungan antara R, r, dan α ?
5. Bangun ruang mana sajakah yang memiliki hubungan dalam kaitannya dengan volume?
6. Apakah gambar berikut termasuk bola? Temukan hubungan antara dua bangun ruang berikut!

[4]

7. Berapakah banyakkah diagonal sisi dan diagonal ruang sebuah prisma segidelapan?
8. Berapa banyakkah diagonal sisi dan diagonal ruang sebuah prisma segi-n? Tentukan nilai n sekecil-kecilnya sehingga prisma segi-n memiliki diagonal ruang.
9. Diberikan prisma segienam. Berapakah jumlah ukuran besar sudut yang ada pada segienam tersebut?

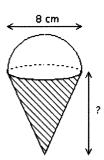
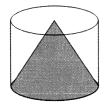
4.3 Asesmen

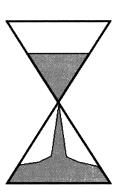
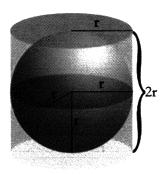
Mahasiswa dianggap memahami bangun ruang sisi lengkung bila menunjukkan hal-hal berikut:

1. Mampu mengidentifikasi unsur-unsur bangun ruang dan menggambarnya.
2. Mampu mengidentifikasi jaring-jaring bangun ruang.
3. Jika diberikan gambar jaring-jaring bangun ruang, mahasiswa mampu mengidentifikasi unsur-unsurnya.
4. Mampu menemukan hubungan antar unsur bangun ruang.
5. Mampu menemukan hubungan antar bangun ruang.

[4] Gambar dari qedcat.com

4.4 Soal Berpikir Tingkat Tinggi

1. Es krim kerucut disajikan lengkap bersama setengah bola es yang ditempatkan pada bagian atas. Jika volume es krim dalam kerucut sama dengan volume es krim di luar kerucut, tentukan tinggi kerucut!

2.

Suatu kerucut dirancang sehingga memenuhi dengan sempurna wadah silinder. Jika volume kerucut 100 cm^3 dan luas permukaan melengkung dari silinder adalah 150 cm^2, tentukan tinggi wadah!

3. Sebuah jam pasir dirancang dengan dua bagian gelas kerucut yang dihubungkan dengan pipa kaca yang tipis. Salah satu gelas dibalik sehingga memudahkan pasir berpindah dari bagian atas ke bagian bawah. Gelas pasir memiliki volume pasir yang diukur dengan teliti di dalamnya sehingga menggunakan sejumlah waktu tepat untuk mengalirkan pasir secara utuh dari satu gelas ke gelas lainnya. Jika pasir tidak dapat keluar dari alat tersebut sehingga bisa digunakan berulang-ulang untuk mengukur panjang waktu tertentu secara akurat, dua gelas pasir dirancang dengan ukuran 9 menit dan 13 menit secara berturut-turut, bagaimana Anda menggunakannya untuk mengukur 30 menit?

4.

Dari gambar di samping, tentukan luas permukaan bola dan volume bola dalam tabung tersebut!

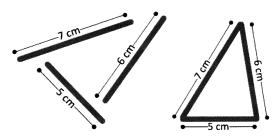
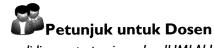
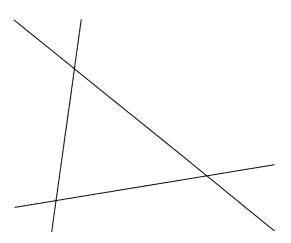
5. *Berbagai Gagasan Pembelajaran*

Berikut adalah aktivitas-aktivitas mahasiswa (siswa) yang dapat dilakukan dalam kelas. Aktivitas berikut tidak harus memiliki hubungan dengan 3 materi yang telah disampaikan di atas, namun tetap dapat dikembangkan sesuai dengan topik terkait.

Memahami Segitiga

Tujuan: Mahasiswa dapat memahami prinsip dasar segitiga

Deskripsi kegiatan:

Dengan tiga potong lidi dengan ukuran 5 cm, 6 cm, dan 7 cm, kita dapat membentuk segitiga.

1. Dapatkah Saudara membentuk segitiga dengan 3 lidi berukuran masing-masing berikut?
   - 5 cm, 6 cm, dan 11 cm
   - 6 cm, 6 cm, dan 11 cm
   - 6 cm, 6 cm, dan 12 cm
2. Bagaimana dengan 3 lidi berukuran berikut?
   - 5 cm, 7 cm, dan 13 cm
   - 7 cm, 7 cm, dan 13 cm
3. Dapatkah Saudara menyimpulkan apa syarat ukuran ketiga potong lidi tersebut agar dapat membentuk suatu segitiga? Tulislah kesimpulan Saudara!

- *Coba perhatikan ukuran lidi yang terpanjang dan JUMLAH ukuran dua lidi lainnya.*
- *Susunan lidi seperti ini tidak diperkenankan.*

Eksplorasi Segitiga Siku-Siku

Tujuan:
1. Membuktikan teorema Pythagoras.
2. Menemukan tiga bilangan real yang membentuk segitiga siku-siku.

Bahan:
12 buah persegi berpetak dengan ukuran: *(terlampir)*
- panjang sisi 3 satuan, 1 buah
- panjang sisi 4 satuan, 1 buah
- panjang sisi 5 satuan, 2 buah
- panjang sisi 6 satuan, 1 buah
- panjang sisi 8 satuan, 1 buah
- panjang sisi 10 satuan, 1 buah
- panjang sisi 12 satuan, 2 buah
- panjang sisi 13 satuan, 1 buah
- panjang sisi 16 satuan, 1 buah
- panjang sisi 20 satuan, 1 buah

3 buah segitiga siku-siku dengan ukuran panjang sisi siku-siku: *(terlampir)*
- 3 dan 4 satuan
- 6 dan 8 satuan
- 5 dan 12 satuan
- 12 dan 16 satuan

Kegiatan:
1. Dari berbagai bahan tersebut di atas, temukan pasangan 1 segitiga dan 3 persegi yang ukuran panjang sisinya sama. Kemudian masukkan hasilnya di tabel berikut:

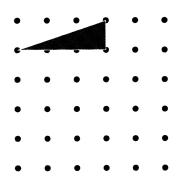
No.	Segitiga	Luas persegi di sisi a	Luas persegi di sisi b	Luas persegi di sisi c	Panjang Sisi a	Panjang Sisi b	Panjang Sisi C	Simpulan (Bagaimana kamu memperoleh c jika diberikan nilai a dan b?)
1.								
2.								
3.								
4.								

Apa yang dapat kalian katakan tentang nilai a, b, dan c?

Eksplorasi Tigaan Siku-siku

2. Masih sesuai dengan tabel sebelumnya, isilah tabel di bawah dengan bilangan-bilangan yang sesuai.

No.	Segitiga	Luas persegi di sisi a	Luas persegi di sisi b	Luas persegi di sisi c	Panjang Sisi a	Panjang Sisi b	Panjang Sisi c
1.	A	476					26
2.	B			10			$\sqrt{10}$
3.	C			13			
4.	D			17			

3. Gambarlah segitiga C, dan D pada daerah berikut, dengan menghubungkan titik ke titik. Segitiga B akan dibuat sebagai contoh.

4. Dengan demikian, kamu akan dapat membuat persegi dengan luas 10, 13, dan 17 satuan luas. Buatlah!
5. **Jadi, menurutmu, apakah yang dimaksud dengan tigaan siku-siku? Apakah tigaan siku-siku harus selalu bilangan asli?**

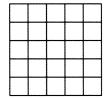
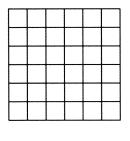
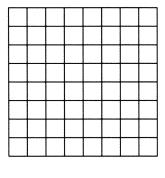
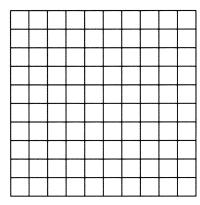
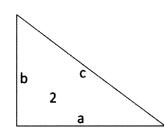
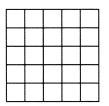
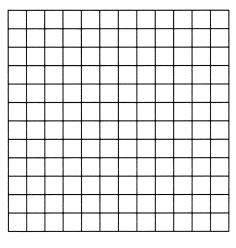
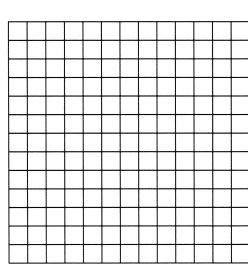
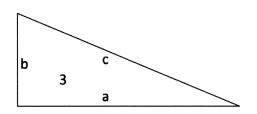
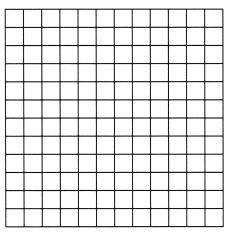
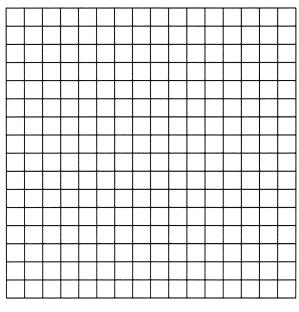
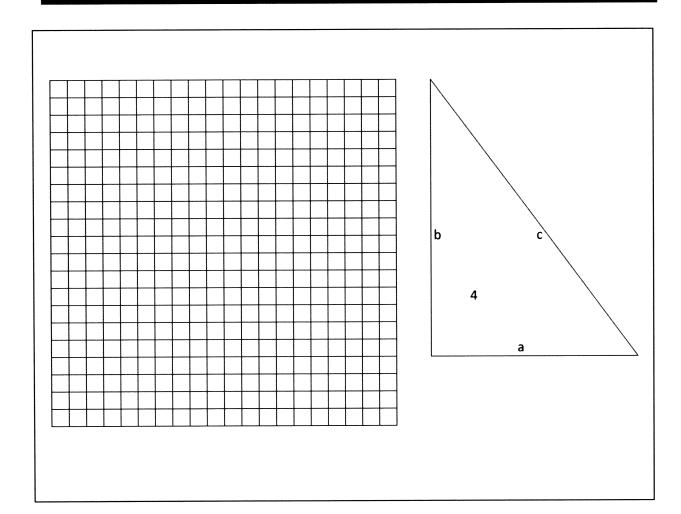
Petunjuk untuk Dosen

- *Aktivitas ini dilakukan dengan kelompok sebanyak-banyaknya 4 orang, dengan rincian tugas, 1 orang penulis dan 3 lainnya praktikan. Penulis bertugas menulis dan mempresentasikan hasilnya. Pengembangannya, dapat dilakukan dengan tugas:*
- *Lukiskan persegi yang memiliki luas daerah 17 satuan luas atau 41 satuan luas. Ukuran luas merupakan kombinasi dari kuadrat bilangan asli.*

Lampiran Aktivitas Eksplorasi Segitiga Siku-Siku

Alat Peraga Aktivitas 6: Tigaan Siku-siku

b
c
3
a

b
c
4
a

Eksplorasi Sisi Tegak Prisma

Tujuan:
Memahami sifat prisma berdasar banyaknya sisi dan sisi tegak prisma.

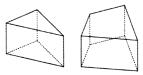
Kegiatan:
Isilah tabel berikut:

n	Nama Prisma	Gambar	Banyaknya sisi tegak	Banyaknya sisi
1	Tidak ada prisma segi 1	Tidak dapat digambar	-	-
2				
3	Prisma segitiga			
4			4	6
5				
6				
n				

Setelah mengamati kolom 4 dan kolom 5, apa yang dapat kamu simpulkan?

Menemukan Sifat Prisma

Tujuan:
Memahami sifat prisma berdasar unsur-unsur bangun ruang.

Silahkan kenali kembali 2 bentuk prisma berikut ini.

Kegiatan:

1. Silakan kalian membuat 4 kelompok, yaitu kelompok rusuk, kelompok sisi, kelompok diagonal sisi, dan kelompok diagonal ruang.
2. Berikut diberikan contoh mengisi tabel untuk titik sudut prisma.

Unsur	Prisma segi-n	Banyak Titik Sudut	Kalimat yang memuat titik sudut	Sifat Prisma
Titik Sudut	3	6	Prisma segitiga memiliki 6 titik sudut	Banyaknya titik sudut pada prisma segi-n adalah 2n
	4	8	Prisma segiempat memiliki 8 titik sudut	
	5	10	Prisma segilima memiliki 10 titik sudut	
	n	2n	Prisma segi-n memiliki 2n titik sudut	

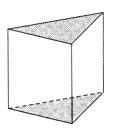
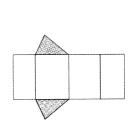
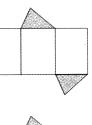
3. Tuliskan satu kalimat yang memuat satu unsur dari prisma tersebut!
   Tuliskan sifat prisma di kolom terakhir!

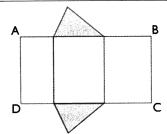
Unsur	Prisma segi-n	Banyak Rusuk	Kalimat yang memuat Rusuk	Sifat Prisma
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Rusuk/	3			
	4			
	5			
	n			

Gantilah kata rusuk pada kolom (3) dan (4) dengan sisi/diagonal sisi/diagonal ruang pada 3 tabel lainnya, dan temukan sifat prisma berdasarkan unsurnya.

4. Jadi sifat prisma berdasarkan unsurnya adalah:
   a. ______________________
   b. ______________________
   c. ______________________

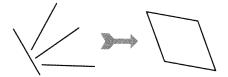
Menemukan Luas Permukaan Prisma

Aktivitas ini akan menuntun Saudara untuk bisa menemukan rumus luas permukaan prisma. Untuk tahap awal, akan dikenalkan jaring-jaring prisma segitiga.

Menurut kalian, jika prisma tersebut di buka, menjadi bangun yang manakah prisma tersebut?

Setelah mantap kalian temukan jaring-jaring prisma, tulislah seluruh bangun datar yang ada, sekaligus rumus luas daerahnya, pada tabel berikut!

Bagian sisi	Bentuk Sisi	Rumus Luas Daerahnya
Alas		
Sisi Tegak		
Tutup		

Perhatikan gambar jaring-jaring prisma di atas!

a. Berbentuk apakah bangun datar ABCD? Apakah rumus luas daerahnya?
b. Perhatikan ruas garis AB. Menurut kalian, apanya segitiga yang diarsirkah ruas garis AB?
c. Jadi, tulislah luas daerah ABCD dengan menggunakan segitiga yang diarsir!
d. Jadi, **RUMUS LUAS PERMUKAAN PRISMA ADALAH ...**

Menemukan Sifat Belah Ketupat

Disediakan 4 ruas garis dengan ukuran panjang yang sama (bisa dari lidi atau pipet yang dipotong). Dengan menghubungkan ujung-ujungnya, akan dapat dibuat tepat sebuah segi empat, sebagaimana ilustrasi berikut:

Gambarlah semua segiempat yang mungkin Saudara susun dan isilah tabel berikut!

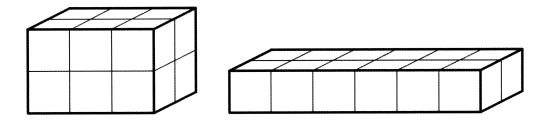
NO	GAMBAR BANGUN	BESAR SUDUT				NAMA BANGUN
		A	B	C	D	
		90^0				

1. Perhatian segiempat Saudara, apakah terdapat pasangan sisi yang sejajar? Adakah yang saling tegak lurus? Bagaimana Saudara menjelaskan hal tersebut?
2. Perhatikan pasangan sudut yang sehadap, apa yang kalian temukan?
3. Buat diagonal masing-masing segiempat yang Saudara temukan kemudian ukur sudut yang terbentuk dari perpotongan dua diagonal tersebut, apa yang Saudara simpulkan?
4. Bandingkan antara sifat-sifat persegi dan sifat-sifat belah ketupat yang Saudara temukan di atas. Apa sajakah persamaan dan perbedaannya?
5. Apakah belah ketupat adalah sebuah persegi ataukah persegi adalah merupakan belah ketupat?

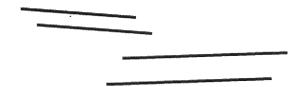
Menemukan Kombinasi Suatu Volume Balok

Tujuan :

Siswa (mahasiswa) memiliki ketajaman intuisi untuk dapat memecahkan masalah yang diberikan.

Sebuah kotak sebanyak 12 buah dapat disusun dengan ukuran 3 x 2 x 2. Dapat juga disusun dengan ukuran 6 x 2 x 1 seperti pada contoh di bawah

1. Buatlah sebanyak-banyaknya susunan 12 kotak yang dapat kalian temukan sehingga susunan balok tersebut berbentuk balok.
2. Berapa banyak susunan 24 kotak yang dapat kalian temukan sehingga susunan balok tersebut berbentuk balok?
3. Berapa banyak susunan 48 kotak yang dapat kalian temukan sehingga susunan balok tersebut berbentuk balok?
4. Apa yang Saudara temukan?

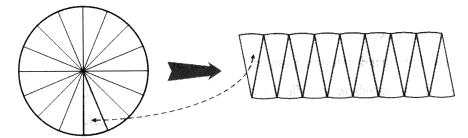
Menemukan Sifat Segiempat

1. Buatlah 4 potongan lidi, masing-masing 2 lidi berukuran sama.

2. Bentuklah segiempat konveks dari keempat potongan lidi tersebut!
3. Salinlah bentuk yangSaudara peroleh ke selembar kertas. Bentuk-bentuk apa saja yang Saudara peroleh?
4. Tuliskan hasil pengamatan Anda dalam tabel berikut :

Bentuk Bangun	Nama Bangun	Panjang Sisi Yang Berhadapan	Kedudukan Sisi Yang Berhadapan	Kedudukan diagonal-diagonal	Besar Sudut Yang Berhadapan	Besar Sudut Yang Berdekatan

5. Ambillah 4 potongan lidi yang lain yang berukuran sama, lakukan kembali langkah 2-4!
6. Ambil lagi 4 potongan lidi yang berbeda-beda ukurannya, lakukan kembali langkah 2-4!
7. Tuliskan definisi dan sifat-sifat masing-masing bangun datar berdasarkan hasil yang telah Saudara peroleh!

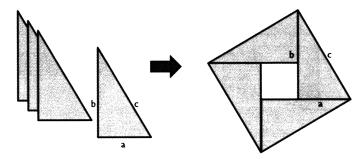
Menemukan Rumus Luas Daerah Lingkaran

Susunan juring-juring yang kongruen pada sebuah lingkaran dapat menjadi bangun datar lain yang menyerupai jajar genjang *(lihat ilustrasi berikut)*.

Pertanyaan:

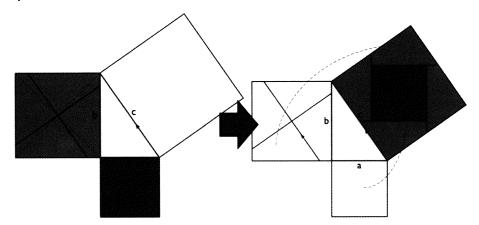
1. Menurut Saudara, bagaimana caranya membagi suatu daerah lingkaran sehingga menghasilkan potongan n juring yang luas daerahnya sama, agar dapat ditransformasikan menjadi bangun datar lain?
2. Dapatkah susunan juring tersebut menjadi:
   a. Persegi panjang? Tunjukkan!
   b. Belah ketupat? Tunjukkan!
   c. Segitiga? Tunjukkan!
3. Bagaimanakah luas daerah lingkaran dan luas daerah 'jajar genjang' hasil susunan juring lingkaran tersebut? Apakah alas jajargenjang tersebut? Apakah tingginya?
4. Bagaimanakah rumus luas daerah lingkaran tersebut diperoleh?

Pembuktian Teorema Pythagoras

Cara I.

1. Buatlah empat segitiga siku-siku yang sama, kemudian guntinglah.
2. Susunlah keempat segitiga tersebut sehingga berbentuk seperti berikut :

3. Bila panjang masing-masing sisi segitiga tersebut adalah a, b, dan c, dapatkah Saudara menyatakan luas persegi besar dengan luas segitiga dan persegi kecil?
4. Apa yang dapat Saudara simpulkan?

Cara II

Perhatikan proses berikut ini

1. Buatlah segitiga siku-siku sembarang danpersegi pada masing-masing sisinya.
2. Guntinglah persegi sedang, sesuai garis tebal, menjadi 4 bagian *(Garis tebal saling tegak lurus dan salah satunya sejajar sisi miring).*
3. Letakkan keempat potongan dari persegi tadi pada persegi besar seperti gambar.
4. Guntinglah juga persegi kecil kemudian letakkan di tengah.
5. Apa yang dapat Saudara simpulkan?

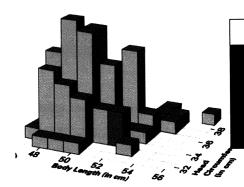
Jenis-jenis Segitiga

Diberikan pasangan tiga ruas garis dengan ukuran, masing-masing:

a. 5 cm, 12 cm, 13 cm
b. 5 cm, 8 cm, 12 cm
c. 4 cm, 7 cm, 10 cm
d. 6 cm, 8 cm, 10 cm
e. 8 cm, 9 cm, 10 cm
f. 10 cm, 12 cm, 13 cm

1. Buatlah segitiga dengan menggunakan pasangan ruas garis di atas!
2. Jenis-jenis segitiga apa yang kamu peroleh? Tuliskan hasilnya pada tabel berikut :

No.	Panjang Sisi *a*	Panjang Sisi *b*	Panjang Sisi *c*	a^2	b^2	$a^2 + b^2$	c^2	Jenis Segitiga
a.	5	12	13					
b.								
c.								
d.								
e.								
f.								

3. Dapatkah kamu menentukan jenis segitiga yang akan terbentuk tanpa menggambar segitiganya?
4. Bagaimana hubungan antara panjang nilai-nilai sisi segitiga dengan jenis segitiga yang terbentuk?
5. Jika diberikan ruas garis dengan ukuran 5 cm dan 10 cm, m adalah panjang ruas garis ketiga. Tentukanlah semua nilai m supaya terbentuk segitiga tumpul!

STATISTIKA DAN TEORI PELUANG

A. Statistika

1. Pengantar

Statistika semestinya banyak diimplementasikan dalam kehidupan sehari-hari karena memberikan banyak manfaat bagi penggunanya, baik dalam perencanaan, evaluasi, maupun pengambilan keputusan. Namun, hal tersebut belum terwujud. Bahkan, banyak mahasiswa yang menganggap bahwa statistika perlu dipelajari hanya sebatas kebutuhan dalam menyusun skripsi. Situasi ini menjadikan mahasiswa tidak memiliki motivasi untuk mempelajarinya secara mendalam dan sungguh-sungguh. Pada hakikatnya, statistika dapat diimplementasikan pada berbagai bidang oleh berbagai profesi dan setiap kelompok usia. Contohnya, ketika akan membeli sepatu, seorang anak berupaya memilih model sepatu yang sedang tren. Pada kasus ini, anak tersebut pada hakikatnya sudah menerapkan statistika karena dia sudah memiliki data perihal model sepatu yang paling banyak dipakai oleh anak-anak saat ini. Dengan kata lain, dia sudah mengungkapkan satu nilai statistika, yakni "modus".

Pada kasus yang lain, seorang abang becak ketika akan membawa penumpangnya ke suatu tujuan akan memilih rute yang tidak menimbulkan kemacetan pada jam tersebut. Pada kasus ini, si abang becak sudah melakukan proses pengumpulan data kemacetan dari tiap kemungkinan rute yang akan dipilih, lalu akhirnya dia memutuskan rute terbaik. Dua kasus ini memberi gambaran bahwa kemampuan berstatistika tidak hanya diterapkan oleh para peneliti, tetapi juga

berbagai profesi. Karena itu, cara agar mahasiswa mampu menerapkan statistika dalam kehidupan sehari-hari penting untuk disampaikan dalam pembelajaran di perkuliahaan. Buku ini memuat "STATISTIKA dalam KEHIDUPAN SEHARI-HARI (*Statistics in Real Life*)" yang menyajikan berbagai contoh penerapan beberapa topik STATISTIKA dalam kehidupan sehari-hari.

Peta konsep materi statistika dan peluang secara umum dapat dilihat pada diagram 1.

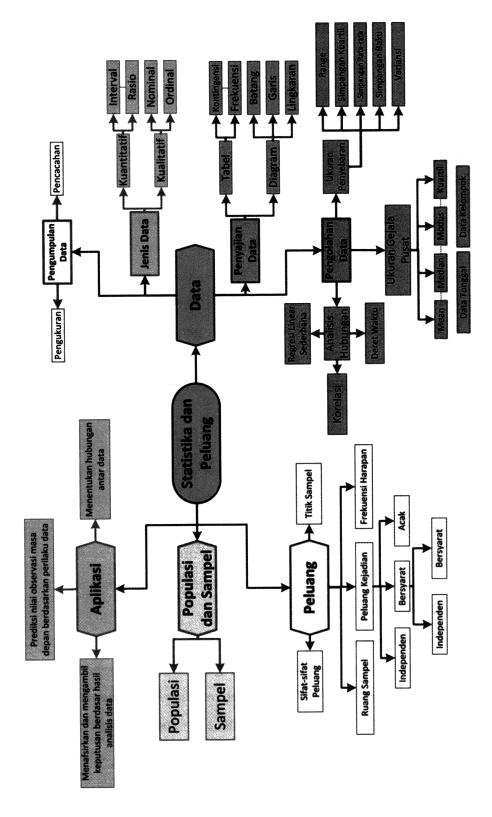



Diagram I.Peta Konsep Materi Statistika dan Peluang

Buku ini akan membahas pembelajaran materi pengumpulan data, penyajian data, dan teori peluang.

2. Pengumpulan Data

Proses awal dalam statistika adalah mengumpulkan data karena data merupakan "bahan baku" yang diperlukan untuk diproses. Tanpa data, kegiatan statistika berikutnya tidak dapat dilakukan. Keberadaan data analoginya seperti bahan baku bagi seorang juru masak. Karena itu, tanpa bahan baku yang tersedia, sang juru masak tidak dapat menghasilkan menu makanan tertentu.

Pengumpulan data sangat penting dalam statistika karena tanpa data yang benar, akurat, dan sesuai akan menghasilkan simpulan yang keliru. Pengumpulan data yang benar dapat dicapai jika pemahaman akan pengukuran dan pencacahan telah terpenuhi, diikuti metode yang dilakukan. Metode yang dimaksud dapat berupa pengamatan/observasi, wawancara, pengunaan angket, dan lain-lain. Selain itu, penentuan sumber data penting sebagai penjaminan kebenaran dari data yang diperoleh. Sebagai contoh, data tentang harga cabai di suatu pasar akan lebih akurat jika dilakukan melalui pengumpulan langsung ke pedagang atau pembeli di pasar dibandingkan dari badan pusat statistika daerah. Sebaliknya, data tentang pertumbuhan ekonomi suatu daerah akan lebih akurat jika diperoleh dari badan pusat statistika daerah karena penentuannya memerlukan perhitungan dan metode khusus.

2.1 Pengukuran dan Pencacahan

a. Fakta Pembelajaran

Pengumpulan data baik melalui pengukuran maupun pencacahan masih sering diterapkan secara tidak tepat oleh mahasiswa. Sementara pemahaman akan dua hal ini menjadi penting karena akan menghasilkan tipe data yang berbeda, yakni data diskrit (cacah) atau kontinu.

b. Proses Pembelajaran

Merujuk pada pola umum alur pembelajaran yang dijelaskan pada bab II Bagian E tentang Pengelolaan Kelas/Kegiatan, alur pembelajaran untuk topik

'Pengukuran dan Pencacahan' ini tergambar pada diagram berikut dengan petak-petak berwarna kuning.

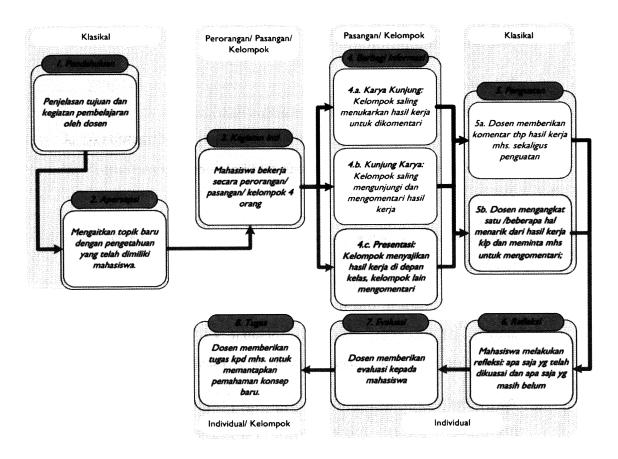



Diagram 2. Alur Pembelajaran 'Pengukuran dan Pencacahan'

Keterangan:

1. Pendahuluan

Dosen menyampaikan tujuan dan kegiatan yang akan dilakukan dalam perkuliahan:

a) Mahasiswa memahami prinsip pengukuran dan pencacahan.

b) Mahasiswa mampu membedakan kegiatan pengukuran dan pencacahan.

2. Apersepsi

Mahasiswa diingatkan dengan aktivitas-aktivitas yang pernah dilakukan di rumah, sekolah, ataupun tempat bermainnya yang nanti bisa dikaitkan dengan pengukuran dan pencacahan.

3. Kegiatan Inti

Aktivitas 1. Memahami Pengukuran dan Pencacahan

Mahasiswa secara berkelompok ditugaskan untuk melaksanakan aktivitas-aktivitas yang terdapat pada lembar aktivitas secara berkelompok *(lihat aktivitas 1).*

Mahasiswa secara berkelompok menuliskan hasil/nilai yang diperoleh ke dalam tabel *(aktivitas 1 lanjutan).*

Mahasiswa secara berkelompok mampu membedakan/mengelompokkan aktivitas-aktivitas yang dilakukan tersebut ke dalam dua kelompok (misal keberadaan alat bantu yang digunakan, nilai/hasil yang diperoleh, satuan).

Aktivitas 2. Pemantapan Pengukuran dan Pencacahan

Mahasiswa secara berkelompok ditugaskan untuk mengidentifikasi/ mendefinisikan perbedaan pengukuran dan pencacahan berdasar aktivitas yang telah dilakukan *(lihat aktivitas 2).*

Aktivitas 3: Pendefinisian Pengukuran dan Pencacahan

Mahasiswa secara berkelompok ditugaskan untuk mengidentifikasi kegiatan pencacahan dan pengukuran dalam berbagai konteks kehidupan *(lihat aktivitas 3).*

4. Presentasi

Dosen memilih 2 kelompok, kemudian meminta wakilnya untuk mempresentasikan hasil kajian. Pemilihan tersebut diusahakan mengontraskan apa yang diperoleh mahasiswa (mengambil dua hasil yang berbeda untuk didiskusikan dan menjadi sumber belajar selanjutnya).

Catatan:

Presentasi mahasiswa bisa dilakukan setelah aktivitas 1, atau aktivitas 2, atau aktivitas 3.

5. Penguatan

Dosen mengangkat satu/beberapa hal menarik dari hasil kerja kelompok, misalnya kelompok yang masih menyatakan kegiatan pengukuran sebagai pencacahan atau sebaliknya dan meminta mahasiswa untuk berkomentar/mengeluarkan pendapatnya.

6. Refleksi

Mahasiswa melakukan refleksi. Refleksi difokuskan pada:

- apa saja yang telah mereka kuasai, dan
- apa saja yang masih belum dipahami.

7. Evaluasi

Dosen memberikan evaluasi berupa salah satu dari soal yang mendorong mahasiswa berpikir tingkat tinggi *(lihat butir evaluasi)*.

8. Tugas

Dosen memberi tugas kelompok untuk mencari data hasil pengukuran dan pencacahan di sekitar kampus.

Aktivitas-Aktivitas Pembelajaran

Aktivitas I: Memahami Aktivitas Pengukuran dan Pencacahan

Lakukanlah aktivitas-aktivitas berikut secara berkelompok.

No	Aktivitas yang dilakukan
1	Menentukan banyak mahasiswa laki-laki di kelas
2	Menentukan tinggi badan salah satu anggota kelompok
3	Menentukan banyak dosen di jurusan matematika
4	Menentukan berat badan salah satu anggota kelompok
5	Menentukan panjang dan lebar buku yang digunakan
6	Menentukan banyak kapur tulis/*boardmarker*
7	Menentukan suhu badan salah satu anggota kelompok
8	Menentukan berat satu buah roti
9	Menentukan sudut pada ubin di kelas

Petunjuk untuk Dosen

Kegiatan-kegiatan di atas hanya sebagai contoh.
Dosen menyediakan alat-alat yang diperlukan seperti penggaris, busur derajat, meteran, timbangan badan, timbangan kecil, termometer, dan lain-lain.

Aktivitas I: Memahami Alat Ukur dan Hasilnya (Lanjutan)

Hasil dari aktivitas I di atas, tuliskan pada tabel di bawah ini.

No	Aktivitas yang dilakukan	Hasil	Satuan	Alat yang digunakan*
1	Menentukan banyak mahasiswa laki-laki di kelas			
2	Menentukan tinggi badan salah satu anggota kelompok			
3	Menentukan banyak dosen di jurusan matematika			
4	Menentukan berat badan salah satu anggota kelompok			
5	Menentukan panjang dan lebar buku yang digunakaan			
6	Menentukan banyak kapur tulis/*boardmarker*			
7	Menentukan suhu badan salah satu anggota kelompok			
8	Menentukan berat satu buah roti			
9	Menentukan sudut pada ubin di kelas			

*) *Diisi jika di dalam aktivitasnya menggunakan alat bantu.*

Aktivitas 2: Pemantapan Pengukuran dan Pencacahan

1. Berilah tanda centang (√), jenis aktivitas yang sesuai pada tabel di bawah ini.

No	Aktivitas	Jenis Aktivitas	
		Pengukuran	Pencacahan
1	Tingkat kepuasan mahasiswa terhadap pelayanan jurusan matematika		
2	Banyak mahasiswa yang memiliki *smartphone*		
3	Kecepatan/laju kendaraan bermotor di jalan		
4	Kadar hidrogen pada segelas air putih		
5	Intensitas cahaya lampu dalam satu ruangan		

2. Berikanlah 3 contoh aktivitas-aktivitas yang termasuk pengukuran!

3. Berikanlah 3 contoh aktivitas-aktivitas yang termasuk pencacahan!

Petunjuk untuk Dosen

Kegiatan di atas menuntut mahasiswa untuk dapat mengimplementasikan pamahaman dasar yang sudah dimiliki. Pada hasil diskusi mahasiswa, kemungkinan akan terdapat perbedaan antara satu kelompok dengan kelompok lainnya. Hal ini terjadi karena pemahamanan mereka belum mendasar.

Teori

Berdasarkan hasil jawaban mahasiswa tersebut, maka mahasiswa diharapkan mampu merumuskan ciri-ciri dari pengukuran dan pencacahan.

Aktivitas 3: Pendefinisian Pengukuran dan Pencacahan

Diskusikan dengan anggota kelompok, dan jawablah pertanyaan berikut ini.

1. Apakah yang dimaksud dengan pencacahan? Berikan ciri-cirinya.
   Jawab:

2. Apakah yang dimaksud dengan pengukuran? Berikan ciri-cirinya.
   Jawab:

Panduan dari simpulan yang diharapkan muncul dari aktivitas 1 - 3

***Pencacahan** adalah aktivitas korespondensi/mengawankan satu-satu dengan bilangan cacah.*

Ciri-Ciri Pencacahan:

- *Pada umumnya tanpa menggunakan instrumen/peralatan.*
- *Hasil harus berupa bilangan cacah.*
- *Tidak harus memiliki satuan.*

***Pengukuran** adalah suatu aktivitas membandingkan sesuatu dengan satuan baku yang tertera pada alat ukur.*

Ciri-Ciri Pengukuran:

- *Menggunakan istrumen/peralatan/alat ukur baku.*
- *Hasil berupa bilangan riil.*
- *Memiliki satuan sesuai dengan alat ukur yang digunakan.*

Evaluasi Individu

A. Apakah pernyataan berikut benar atau salah, berikan komentar/alasan:

1. Pengumpulan data dengan pencacahan hanya dapat dilakukan untuk data yang sedikit.
2. Pengumpulan data dengan pengukuran mutlak memerlukan alat/instrumen.
3. Alat/instrumen yang diperlukan dalam pengumpulan harus diuji validasinya.
4. Pengumpulan data dengan pengukuran lebih akurat daripada pencacahan.
5. Pengumpulan data perihal kepuasan konsumen dapat dilakukan dengan pencacahan maupun pengukuran.

B. Tentukan metode pengumpulan data yang tepat untuk peristiwa berikut:

1. Persentase petani yang gagal panen.
2. Tingkat kinerja instansi pemerintah.
3. Polusi udara di daerah mahasiswa tinggal.
4. Pertumbuhan penduduk Indonesia pada 2012.
5. Harga satu kilogram cabai di pasar di sekitar tempat tinggal mahasiswa.

2.2 Sumber Data dan Metode Pengumpulannya

a. Fakta Pembelajaran

Data dapat diperoleh dari berbagai sumber, baik secara langsung maupun dari instansi, lembaga, perusahaan, atau lainnya. Metode pengumpulan data secara langsung dari sumbernya juga sangat tergantung pada jenis data yang akan dikumpulkan. Metode pengumpulan data langsung dari sumbernya dapat berupa metode pengamatan/observasi, wawancara, angket, maupun eksperimen.

Pengumpulan data selama ini sering kurang tepat karena kesalahan dalam memilih instrumen. Misalnya, menghimpun data tentang kepuasan pelanggan kurang tepat melalui pengamatan, seharusnya menggunakan daftar pertanyaan.

b. Proses Pembelajaran

Merujuk pada pola umum alur pembelajaran yang dijelaskan pada bab II, alur pembelajaran untuk topik 'Sumber Data dan Metode Pengumpulannya' ini tergambar pada diagram 3 berikut dengan petak-petak berwarna kuning.

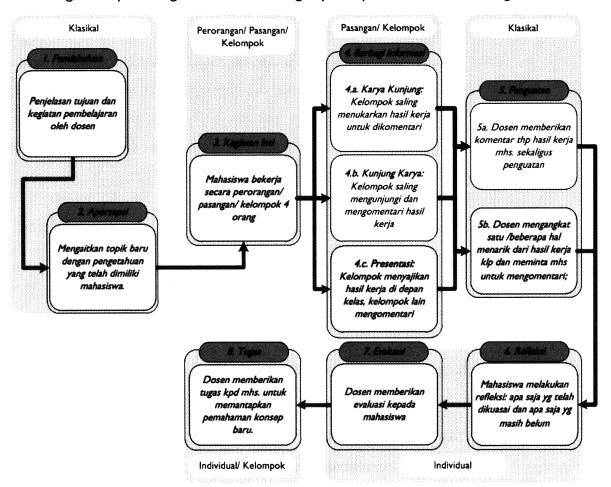



Diagram3. Alur Pembelajaran 'Sumber Data dan Metode Pengumpulannya'

Keterangan:

1. Pendahuluan

Dosen menyampaikan tujuan dan kegiatan yang akan dilakukan dalam perkuliahan:

a) Mahasiswa memahami prinsip sumber data.

b) Mahasiswamemahami metode pengumpulan data.

2. Apersepsi

Mahasiswa diingatkan pentingnya sumber data dan metode pengumpulan data untuk kevalidan simpulan yang akan diambil.

3. Kegiatan Inti

Aktivitas 1. Pengumpulan Data Primer

Mahasiswa ditugaskan untuk memperoleh data primer dengan melakukan pendataan kepada kurang lebih 50 mahasiswa *(lihat aktivitas 1).* Hasil pendataan kemudian dimasukkan ke dalam aplikasi pengolah data.

Aktivitas 2. Pengumpulan Data Sekunder

Mahasiswa ditugaskan untuk melakukan pengumpulan data dari dokumen/majalah/internet *(lihat aktivitas 2).* Hasil pendataan kemudian dimasukkan ke dalam aplikasi pengolah data.

4. Presentasi

Dosen memilih 2 kelompok, kemudian meminta wakilnya untuk mempresentasikan hasil kajian. Masing-masing kelompok diminta untuk lebih fokus kepada salah satu dari:

- Pengumpulan data primer, atau
- Pengumpulan data sekunder.

5. Penguatan

Dosen mengangkat satu/ beberapa hal menarik dari hasil kerja kelompok, misalnya kelompok yang belum dapat membedakan pengumpulan data primer dan sekunder, dan meminta mahasiswa untuk berkomentar.

6. Refleksi

Mahasiswa melakukan refleksi. Refleksi difokuskan pada:

- apa saja yang telah mereka kuasai, dan
- apa saja yang masih belum dipahami.

7. Evaluasi

Dosen memberikan evaluasi berupa salah satu dari soal yang mendorong mahasiswa berpikir tingkat tinggi *(lihat butir evaluasi)*.

8. Tugas

Dosen memberi tugaskelompok untuk mencari data hasil pengukuran dan pencacahan di sekitar kampus.

Aktivitas -Aktivitas Pembelajaran

Dalam pengambilan data primer dan sekunder, mahasiswa ditugaskan untuk melakukan studi lapangan.

Aktivitas 1: Pengumpulan Data Primer

Mahasiswa secara berkelompok diminta untuk melakukan pengumpulan data perihal mahasiswa yang ada di lingkungan kampus. Pengumpulan data ini dilakukan setelah terlebih dahulu membuat *form* yang akan diberikan kepada mahasiswa. Ketentuan dalam pengumpulan data ini adalah sebagai berikut:

1. Banyak data: minimum 100 mahasiswa.
2. Data yang dikumpulkan terdiri atas nama, NIM, jenis kelamin, tempat/tanggal lahir, alamat tinggal, no telp/HP, alamat *e-mail*, fakultas, jurusan/program studi, semester, IPK.
3. Mahasiswa yang dijadikan responden dalam pengumpulan data ini harus berasal dari jurusan/prodi yang bervariasi. Sebaiknya mewakili seluruh jurusan/prodi yang ada di dalam satu fakultas.

Formulir Isian Mahasiswa

1	Nama	:
2	NIM	:
3	Jenis Kelamin	:
4	Jurusan/Fakultas	:
5	Tempat/Tanggal Lahir	:
6	Alamat Tempat Tinggal	:
7	No Telp/HP	:
8	Alamat *E-mail*	:
9	IPK	:

............................., ...

....

....

Bekerja dengan Komputer

Data yang sudah terkumpul selanjutnya dirangkum dan jika memungkinkan dimuat dalam EXCEL dengan format sebagai berikut:

No	Nama	NIM	Jenis Kelamin	Fakultas/Jurusan	Tempat/Tanggal Lahir	Alamat Tinggal	No Telp/HP	Alamat *E-mail*	IPK
1.									
2.									
3.									

Catatan:

Bentuk tabel dan tulisan di atas hanya agar supaya isian baris pertama tabel terbaca.

Aktivitas 2 : Pengumpulan Data Sekunder

Carilah data di majalah/koran/internet atau media lainnya dari tema-tema di bawah ini.

1. Penjualan sepeda motor selama 10 tahun terakhir.
2. Kasus kekerasan pada anak 10 tahun terakhir.
3. Kelulusan UN siswa SMP di Kota Semarang.
4. Pemilih di dalam Pemilihan Umum Presiden 2014

Petunjuk untuk Dosen

Tema-tema di atas hanya sebagai contoh, bisa dikembangkan dengan tema-tema yang lebih baru. Esensinya adalah sumber data sekunder.

Bekerja dalam kelompok

Diskusikan dengan anggota kelompok, perbedaan apa saja yang dapat kalian lihat setelah melaksanakan aktivitas 1 dan aktivitas 2.

Petunjuk untuk Dosen

Jawaban yang diharapkan adalah sebagai berikut:

- *Data primer adalah data yang diperoleh langsung dari sumbernya.*
- *Data primer dapat diperoleh melalui pengamatan/observasi, wawancara, penggunaan angket, eksperimen, dan lain-lain.*
- *Data sekunder adalah data yang diperoleh dari dokumentasi yang dikeluarkan oleh suatu lembaga seperti Badan Pusat Statistik, BadanInvestasi Daerah, dan sebagainya.*
- *Pengambilan data sekunder harus menyebutkan sumber data tersebut.*

Proyek Kelompok

1. Rancanglah suatu proyek di dalam kelompok untuk mengumpulkan data dengan kategori data primer dan data sekunder.
2. Buatlah laporannya dan dipresentasikan.

3. Penyajian Data

1.1 Fakta Pembelajaran

Tahap berikutnya yang dilakukan dalam statistika adalah menyajikan data. Penyajian data dapat dilakukan melalui tiga cara, yaitu, tabel, grafik, dan nilai statistik. Inti utama dari penyajian data adalah bagaimana agar pengguna data dapat memahami data yang disajikan lebih mudah dan lebih informatif. Hal ini analog dengan penyajian makanan yang telah selesai dimasak oleh seorang koki. Penyajian yang tidak menarik menjadikan orang tidak tertarik untuk menikmati makanan tersebut walaupun makanan tersebut lezat. Sebaliknya, penyajian yang menarik memuat orang berkeinginan untuk mencicipinya walaupun mungkin makanan tersebut kurang lezat.

Media penyajian data yang dipilih juga sangat tergantung pada data yang akan disajikan. Hal ini tidak ubahnya seperti media penyajian makanan yang sangat tergantung jenis makanan yang akan disajikan. Misalnya, nasi goreng sebaiknya disajikan dalam piring ceper, bukan mangkok. Demikian juga halnya jus sirsak sebaiknya disajikan dalam gelas bukan dalam mangkok. Sering terjadi kesalahan pemilihan media penyajian data sehingga data yang ditampilkan tidak memberi informasi yang benar dan akhirnya menghasilkan kesimpulan yang salah. Pada bagian ini akan dibahas beberapa media penyajian data baik berupa tabel, grafik, maupun nilai statistik.

1.2 Proses Pembelajaran

Merujuk pada pola umum alur pembelajaran yang dijelaskan pada bab II, alur pembelajaran untuk topik 'Penyajian Data' ini tergambar pada diagram 4 berikut dengan petak-petak berwarna kuning.

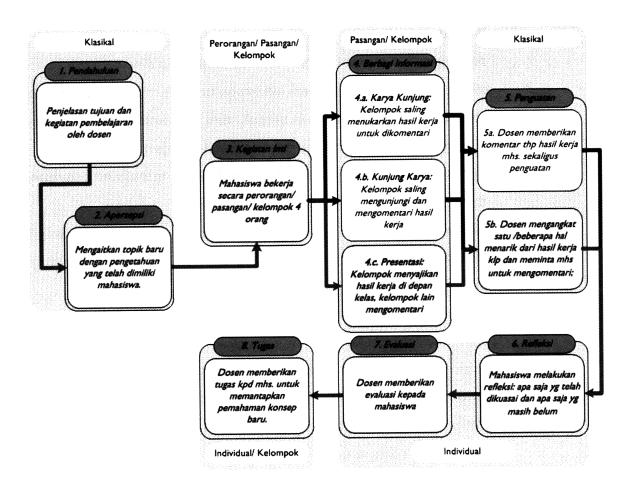



Diagram4. Alur Pembelajaran 'Sumber Data dan Metode Pengumpulannya'

Keterangan:

1. **Pendahuluan**

   Dosen menyampaikan tujuan dan kegiatan yang akan dilakukan dalam perkuliahan:

   a. Mahasiswa memahami jenis-jenis penyajian data.

   b. Mahasiswa dapat menyajikan data dengan cara yang benar.

2. **Apersepsi**

   Mahasiswa diperlihatkan sajian-sajian data berupa diagram lingkaran dan diagram batang yang pernah diterima pada jenjang sekolah dasar.

3. **Kegiatan Inti**

   Aktivitas 1. Penyajian Data dalam Tabel Baris-Kolom

   Mahasiswa akan bekerja dalam kelompok untuk memahami pengelompokan data dan menyajikannya dalam bentuk tabel baris-kolom *(lihat aktivitas 1).*

   Aktivitas 2. Penyajian Data dalam Tabel Kontingensi

   Mahasiswa akan bekerja dalam kelompok untuk memahami penyajian data dalam bentuk tabel baris-kolom *(lihat aktivitas 2).*

   Aktivitas 3. Penyajian Data dalam Diagram *Clustered Column (Clustered Bar)*

   Mahasiswa akan bekerja dalam kelompok untuk memahami penyajian data dalam bentuk diagram batang *(lihat aktivitas 3).*

   Aktivitas 4. Penyajian Data dalam Diagram *Stacked Column (Stacked Bar)*

   Mahasiswa akan bekerja dalam kelompok untuk memahami penyajian data dalam bentuk Diagram *Stacked Bar (lihat aktivitas 4).*

   Aktivitas 5. Penyajian Data dalam Diagram 100% *Stacked Column*

   Mahasiswa akan bekerja dalam kelompok untuk memahami penyajian data dalam bentuk Diagram 100% *Stacked Column (lihat aktivitas 5).*

   Aktivitas 6. Penyajian Data dalam Diagram Lingkaran

   Mahasiswa akan bekerja dalam kelompok untuk memahami penyajian data dalam bentuk Diagram Lingkaran *(lihat aktivitas 6).*

   Aktivitas 7. Penyajian Data dalam Gambar Grafik

   Mahasiswa akan bekerja dalam kelompok untuk memahami penyajian data dalam bentuk Gambar Grafik *(lihat aktivitas 7).*

4. **Presentasi**

   Dosen meminta kelompok untuk mempresentasikan hasil kajian. Masing-masing kelompok diminta untuk lebih fokus pada:

   - Proses penyusunan grafik/diagram.
   - Cara memanfaatkan grafik/diagram tersebut.

5. **Penguatan**

   Dosen mengangkat satu/beberapa hal menarik dari hasil kerja kelompok, misalnya kelompok yang masih belum pas saat menyajikan data, dan meminta mahasiswa untuk berkomentar.

6. **Refleksi**

   Mahasiswa melakukan refleksi. Refleksi difokuskan pada:

   - apa saja yang telah mereka kuasai, dan
   - apa saja yang masih belum dipahami.

7. **Evaluasi**

   Dosen memberikan evaluasi berupa salah satu dari soal yang mendorong mahasiswa berpikir tingkat tinggi *(lihat butir evaluasi).*

8. **Tugas**

   Dosen memberi tugas kelompok untuk mencari data di sekitar kampus kemudian menyajikannya dalam bentuk grafik/diagram.

1.3 Tabel Baris Kolom

Cara penyajian data dalam tabel baris kolom atau disebut juga Tabel Satu Dimensi merupakan cara yang paling banyak digunakan. Penyajian dalam tabel dinyatakan dalam bentuk baris dan kolom. Pemahaman akan berbagai bentuk tabel dapat dicapai melalui berbagai kegiatan pengolahan data berikut.

Aktivitas -Aktivitas Pembelajaran

Aktivitas 1 : Penyajian Data dalam Tabel Baris-Kolom

Pada kegiatan berikut, setiap mahasiswa diminta menyediakan dua kertas kecil berukuran 7.5 x 7.5 cm, sebaiknya menggunakan dua kertas yang berbeda warna. Pada kertas pertama diminta mahasiswa menuliskan jenis kelaminnya (perempuan atau laki-laki) dan pada kertas kedua menuliskan buah yang disukai dari empat pilihan (apel, jeruk, semangka, dan mangga). Selanjutnya mahasiswa diminta menggabungkan seluruh kertas yang bertuliskan "laki-laki" pada satu kelompok dan "perempuan" pada kelompok lainnya serta menghitung banyaknya anggota di setiap kelompok. Contoh untuk perempuan sebanyak 8 orang dan laki-laki sebanyak 12 orang akan terbentuk seperti gambar berikut:

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
Perempuan (P)

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
Laki-Laki (L)

Dari tumpukan kertas tersebut, mahasiswa diminta menghitung banyak perempuan=n(P) dan banyak laki-laki=n(L). Dari perhitungan tersebut, mahasiswa diminta menghitung proporsi perempuan=p(P) dan proporsi laki-laki=p(L).

Pada tahap ini mahasiswa sudah dapat mengelompokkan data yang sifatnya dikotomi, yakni data yang hanya memiliki dua kategori (laki-laki atau perempuan). Selanjutnya mahasiswa diminta menyajikannya dalam bentuk tabel yang memuat jumlah dan proporsi untuk tiap jenis kelamin seperti berikut:

Tabel 1. Banyak Mahasiswa Berdasar Jenis Kelamin

Jenis Kelamin	Banyak (Frekuensi)	Proporsi
Perempuan		
Laki-Laki		
Jumlah		

Petunjuk untuk Dosen

Pembedaan antara "banyak (frekuensi)" dan "proporsi (perbandingan)" menjadi fokus pada kegiatan ini.

Proporsi perempuan $= \dfrac{banyaknya\ perempuan}{banyaknya\ perempuan\ dan\ laki-laki} = \dfrac{n(P)}{n(P)+n(L)}$

Dapat dinotasikan:p(P) $= \dfrac{n(P)}{n(P)+n(L)}$

Demikian halnya dengan yang laki-laki.

Aktivitas 2 : Penyajian Data dalam Tabel Kontingensi

Tabel kontingensi merupakan bagian dari tabel baris kolom. Namun, tabel ini mempunyai ciri khusus, yaitu untuk menyajikan data yang terdiri atas dua faktor atau lebih yang tiap faktor terdiri atas beberapa kategori. Bila banyaknya faktor ada dua, itu disebut Tabel Kontigensi Dua Dimensi. Jika terdiri atas tiga faktor, disebut Tabel Kontigensi Tiga Dimensi, demikian selanjutnya. Tabel Kontingensi Dua Dimensi yang faktor satu terdiri atas b kategori dan lainnya terdiri atas k kategori, dapat dibuat daftar kontingensi berukuran $b \ x \ k$ dengan b menyatakan baris dan k menyatakan kolom.

Dari kegiatan sebelumnya, mahasiswa diminta memisahkan kertas datanya berdasar jenis kelamin dan buah yang disukai pada delapan kelompok data seperti contoh berikut:

	Apel	Jeruk	Semangka	Mangga
Perempuan	□□	□ □□	□□□	□□
Laki-Laki	□□□	□□	□□	□□□

Dari kegiatan di atas, mahasiswa diminta menghitung banyaknya data pada tiap sel dan persentase masing-masing. Berdasar hasil kegiatan ini, mahasiswa dapat membentuk tabel kontigensi dua dimensi dari frekuensi maupun persentase (proporsi) seperti pada Tabel 2 dan Tabel 3 berturut-turut.

Tabel 2
Banyak Mahasiswa yang Menyukai Buah Berdasar Jenis Kelamin

Jenis Kelamin	Buah yang Disukai				Jumlah
	Apel	Jeruk	Semangka	Mangga	
Perempuan					
Laki-Laki					
Jumlah					

Tabel 3
Persentase Mahasiswa yang Menyukai Buah Berdasar Jenis Kelamin

Jenis Kelamin	Buah yang Disukai				Jumlah
	Apel	Jeruk	Semangka	Mangga	
Perempuan					
Laki-Laki					
Jumlah					

Proyek Kelompok

Dari data primer yang telah dikumpulkan sebelumnya oleh tiap kelompok, dimintakan membuat tabel kontigensi berikut:

1. Tabel Kontigensi Dua Dimensi
    a. Jenis Kelamin – Tempat Lahir
    b. Prodi – IPK
    c. Jenis Kelamin – Podi

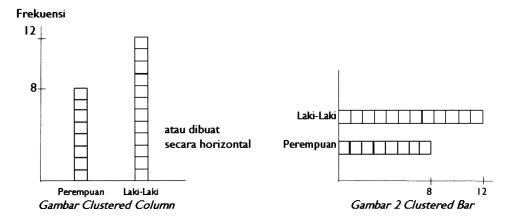
2. Tabel Kontigensi Tiga Dimensi
    a. Jenis Kelamin – Prodi – Semester
    b. Jenis Kelamin – Tempat Lahir – Semester

Penyajian Data dalam Grafik/Diagram

Terdapat berbagai jenis grafik/diagram yang dapat dipilih untuk menyajikan data. Jenis grafik/diagram yang dipilih sangat tergantung pada jenis data yang akan disajikan. Hal ini analog dengan media yang digunakan untuk menyajikan makanan tergantung pada jenis makanan yang akan disajikan. Dalam praktiknya dapat terjadi pemilihan jenis grafik/diagram yang tidak sesuai tipe data yang akan disajikan sehingga menimbulkan kesalahan dalam menyimpulkan. Pada kegiatan berikut akan dibahas beberapa jenis grafik/diagram yang dapat dipilih untuk menampilkan data. Terdapat tiga jenis Diagram Batang yang dapat digunakan untuk menampilkan data, yaitu: *clustered column* (*clustered bar*), *stacked column* (*stacked bar*), dan 100% *stacked column* (100% *stacked bar*). Kegiatan berikut membahas pembuatan tiga jenis diagram tersebut.

Aktivitas 3: Penyajian Data dalam Diagram Clustered Column (Clustered Bar)

Data yang digunakan dalam kegiatan ini adalah datum tiap mahasiswa dari kegiatan sebelumnya. Menggunakan data tersebut, tiap mahasiswa diminta menyusun kertas yang bertuliskan "perempuan" secara vertikal, demikian juga untuk kertas yang bertuliskan "laki-laki" pada posisi di sampingnya seperti pada gambar contoh berikut.

Gambar Clustered Column *Gambar 2 Clustered Bar*

Dari diagram yang dibentuk, mahasiswa diminta mendiskusikan untuk menjawab pertanyaan berikut:

1. Apakah dapat diketahui langsung, mana yang lebih banyak, laki-laki atau perempuan?
2. Apakah dapat diketahui langsung, seberapa persen laki-laki lebih banyak daripada perempuan?

Dengan cara yang sama, mahasiswa diminta membuat diagram untuk menampilkan banyaknya mahasiswa yang menyukai buah.

Aktivitas 4: Penyajian Data dalam Diagram Stacked Column (Stacked Bar)

Data yang digunakan dalam kegiatan ini adalah data pada Tabel 2. Tiap mahasiswa diminta menyusun kertas datanya berdasar kelompok perempuan atau laki-laki. Selanjutnya pada tiap kelompok disusun berdasarkan buah yang disukai dengan urutan: apel, jeruk, semangka, dan mangga, seperti pada contoh berikut:

	Mangga
	Mangga
Mangga	Semangka
Semangka	Semangka
Jeruk	Jeruk
Apel	Jeruk
Apel	Apel
Perempuan	**Laki-Laki**

Dari kegiatan tersebut, mahasiswa diminta untuk memberi jawaban atas pertanyaan berikut:

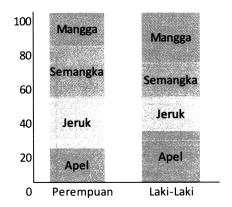
1. Buah apakah yang paling disukai kelompok perempuan dan kelompok laki-laki?
2. Siapakah yang lebih menyukai buah semangka, laki-laki atau perempuan?
3. Apa berbedaan informasi yang diperoleh dari diagram *clustered column* dan *stacked column?*

Petunjuk untuk Dosen

Aktivitas 3 dan 4 dilaksanakan dengan diskusi di dalam kelas. Dosen menjadi moderator agar diskusi menghasilkan fakta yang menarik, misalnya apakah diagram batang yang dimaksud telah benar dan mudah dipahami oleh pembaca yang lain.

Aktivitas 5: Penyajian Data dalam Diagram 100% Stacked Column (100% Stacked Bar)

Data yang digunakan untuk kegiatan ini adalah data pada Tabel 3. Mahasiswa diminta untuk membuat diagram seperti contoh berikut:

Petunjuk untuk Dosen

Pada kondisi seperti di atas yang terdiri atas 2 kategori, jumlah dari kategori tersebut di usahakan sama. Bisa saja ini menjadi bahan diskusi, mengapa jumlah masing-masing kategori tersebut diusahakan sama.

Proyek Kelompok

Dari data primer yang telah dikumpulkan sebelumnya oleh tiap kelompok, dimintakan membuat diagram *stacked column* dan *stacked bar* untuk kombinasi data berikut:

1. Jenis Kelamin – Status Tinggal
2. Prodi – Semester
3. Jenis Kelamin – Tempat Lahir
4. Jenis Kelamin – Prodi – Semester
5. Jenis Kelamin – Semester– IPK

Bekerja dengan Komputer

Dari data primer yang telah dikumpulkan sebelumnya oleh tiap kelompok, dimintakan membuat diagram *stacked column* dan *stacked bar* untuk kombinasi data berikut dengan menggunakan aplikasi pengolah data:

1. Jenis Kelamin – Status Tinggal
2. Fakultas – Semester
3. Jenis Kelamin – Program Studi
4. Jenis Kelamin – Program Studi – Semester
5. Jenis Kelamin – Status Tinggal – Semester

Aktivitas 6: Penyajian Data dalam Diagram Lingkaran (Pie Chart)

Pada kegiatan ini mahasiswa menggunakan data individu mahasiswa yang terdiri atas jenis kelamin dan buah yang disukai.

Mahasiswa diminta membuat diagram lingkaran dengan tahapan sebagai berikut:

1. Hitung jumlah mahasiswa laki-laki.
2. Hitung proporsi laki-laki dengan rumus = jumlah laki-laki dibagi jumlah mahasiswa keseluruhan x 100.
3. Hitung luasan daerah untuk laki-laki dengan rumus-rumus = proporsi laki-laki x 360^0.
4. Lakukan hal yang sama untuk jenis kelamin perempuan.
5. Gambarkan dalam diagram lingkaran seperti gambar berikut:

Gambar Diagram Lingkaran

Proyek Kelompok

5. Dari data primer yang telah dikumpulkan sebelumnya oleh tiap kelompok, dimintakan membuat diagram lingkaran untuk menggambarkan data berikut:
   a. Jenis Kelamin
   b. Status Tinggal
   c. Semester
6. Carilah data sekunder yang diperoleh dari majalah/koran/internet dan kemudian buat diagram lingkaran dari data tersebut.

Bekerja dengan Komputer

Dari data primer yang telah dikumpulkan sebelumnya oleh tiap kelompok, dimintakan membuat diagram lingkaran untuk menggambarkan data berikut dengan menggunakan perangkat lunak Microsoft Excel:

1. Jenis Kelamin
2. Status Tinggal
3. Fakultas
4. Semester

Aktivitas 7: Penyajian Data dalam Grafik Gambar (Pictogram)

Mahsiswa diminta memilih buah kesukaan sesuai dengan gambar yang disediakan dan menempelkannya pada diagram yang telah disediakan.

7				
6				
5				
4				
3				
2				
1				

Kelengkapan:

Gambar/kartu buah-buahan dengan masing-masing banyaknya menyesuaikan dengan banyak siswa di kelas.

 = apel

= mangga

= jeruk

= semangka

Petunjuk untuk Dosen

Jika jumlah responden banyak, bisa saja dikatakan bahwa mewakili 10. Dengan demikian, mewakili 5. Atau mewakili 5.

Diberikan data tinggi 30 mahasiswa sebagai berikut:

160	170	172	165	155	152	154	162	165	158
175	168	158	155	172	164	165	168	172	165
159	164	173	168	178	168	167	165	175	174

Data di atas dapat digambar dalam *stem and leaf* diagram sebagai berikut:

15	2	4	5	5	8	8	9								
16	0	2	4	4	5	5	5	5	5	7	8	8	8	8	8
17	0	2	2	2	3	4	5	5	8						

Petunjuk untuk Dosen

Untuk menggambarkan diagram *stem and leaf*, akan lebih mudahnya data diurutkan terlebih dahulu.

Latihan Individu

1. Persentase hunian kamar di hotel berbintang di Kota "X" tahun 2012 disajikan pada tabel berikut.

Bulan	Januari	Februari	Maret	April	Mei	Juni
Persentase Hunian	31,69	42,42	40,23	40,44	38,15	38,45

   a. Diagram apa yang sesuai untukmenyajikan data tersebut? Buatlah diagramnya!
   b. Berdasar diagram garis yang disajikan, bagaimana kecenderungan dari persentase hunian kamar hotel itu?
   c. Informasi apa yang diperoleh dari grafik yang disajikan? Kemukakan sebanyak-banyaknya.

2. Tabel di bawah memberi ukuran (dalam meter) dari 20 meja.

Meja	Panjang	Lebar
1	4,7	1,4
2	4,5	1,5
3	4,9	1,5
4	4,0	1,3
5	4,6	1,5

Meja	Panjang	Lebar
6	4,5	1,3
7	4,7	1,6
8	3,3	1,0
9	4,6	1,3
10	3,9	1,4

Meja	Panjang	Lebar
11	3,5	1,0
12	4,2	1,5
13	4,0	1,0
14	4,7	1,4
15	3,6	1,3

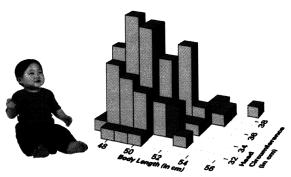
Meja	Panjang	Lebar
16	4,4	1,4
17	4,5	1,5
18	4,1	1,0
19	4,5	1,5
20	3,9	1,1

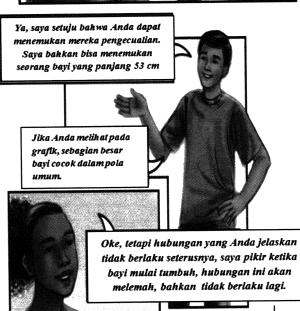
Buatlah tabel dan diagram yang menunjukkan informasi yang ditentukan oleh setiap pernyataan di bawah ini. Jelaskan mengapa dipilih tersebut.

a . Banyak meja yang mempunyai panjang 4,0-4,1 meter.

b . Persentase meja yang memiliki lebar 1,3 meter.

c . Bagaimana kecenderungan panjang dan lebar meja tersebut?

3. Untuk menunjukkan panjang tubuh, lingkar kepala, dan jumlah bayi yang diteliti, dapat dibuat grafik tiga dimensi sebagai berikut.

   a. Informasi apa yang diberikan oleh grafik? Jelaskan!
   b. Ubah data dalam grafik tersebut dalam tabel yang sesuai.

Simak dan analisis percakapan Rudi dan Nina atas grafik tersebut.

a. Apakah pernyataan Rudi atau Nina dapat diterima? Jelaskan.

b. Jelaskan bagaimana besar lingkar kepala untuk bayi dengan panjang tubuh 55 sentimeter (cm)?

c. Seorang anak umur satu tahun memiliki tinggi 92 cm. Berapakah lingkar kepala anak tersebut?

B. Teori Peluang

1. Pengantar

Materi peluang merupakan salah satu materi yang penting untuk dipelajari karena implementasi materi ini sering ditemui dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya, seorang siswa ingin masuk ke perguruan tinggi, baik itu swasta ataupun negeri sesuai dengan jurusan yang dia inginkan. Untuk memilih jurusan di PTN, selain mempertimbangkan minat dan bakat, dia perlu mempertimbangkan peluang masuk jurusan tersebut. Hal ini dapat dilakukan dengan membandingkan data sebelumnya mengenai banyaknya orang yang memilih jurusan itu dengan daya tampungnya. Misalnya, dia akan memilih jurusan A dan B. Jurusan A pada tahun sebelumnya dipilih oleh 2.569 orang dan daya tampungnya 70. Adapun jurusan B dipilih oleh 3.250 orang dengan daya tampung 125. Jurusan manakah yang peluang lulusnya lebih besar?

Teori peluang diaplikasikan tidak hanya dalam bidang pendidikan, tetapi juga berbagai bidang seperti asuransi, perbankan, bisnis, meterologi, dan bidang lainnya. Teori peluang sangat penting dalam membahas perihal ketidakpastian. Hal ini sangat menarik karena sesungguhnya apa yang akan terjadi pada masa yang akan datang adalah sesuatu yang tidak pasti. Sulit dipastikan apakah seorang mahasiswa akan lulus suatu mata kuliah tertentu. Demikian halnya untuk memastikan terjadinya hujan pada suatu hari. Hal ini menunjukkan bahwa materi peluang perlu dipelajari. Pada bagian ini akan diberikan konsep peluang melalui kasus-kasus yang sering ditemui dalam kehidupan sehari-hari.

2. Menghitung Anggota Ruang Sampel

2.1 Fakta Pembelajaran

Penentuan banyak sampel dalam suatu peristiwa merupakan bagian yang penting dalam pemahaman tentang teori peluang. Kegiatan berikut akan menjelaskan beberapa teknik menghitung elemen dalam ruang sampel. Metode yang dibahas meliputi teknik perkalian (*multiplication technique*), permutasi, dan kombinasi.

2.2 Proses Pembelajaran

Merujuk pada pola umum alur pembelajaran yang dijelaskan pada bab II, alur pembelajaran untuk topik 'Menghitung Anggota Ruang Sampel' ini tergambar pada diagram 5 berikut dengan petak-petak berwarna kuning.

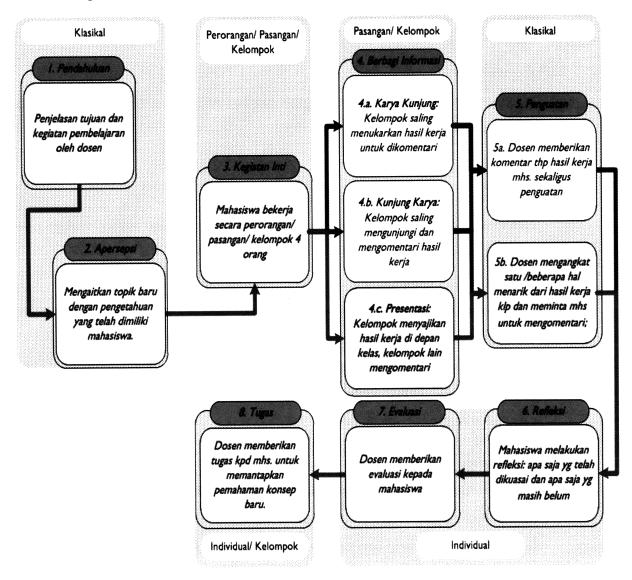



Diagram 5. Alur Pembelajaran 'Menghitung Anggota Ruang Sampel'

Keterangan:

1. **Pendahuluan**

   Dosen menyampaikan tujuan dan kegiatan yang akan dilakukan dalam perkuliahan, yaitu mahasiswa memahami ruang sampel dan teknik menghitungnya, dengan teknik perkalian, permutasi dan kombinasi.

2. **Apersepsi**

   Mahasiswa diingatkan akan pentingnya memahami prinsip ruang sampel dalam teori peluang.

3. **Kegiatan Inti**

   Aktivitas 1. Memahami Teknik Perkalian

   Mahasiswa ditugaskan untuk memahami teknik perkalian dalam menghitung anggota ruang sampel secara berkelompok *(lihat aktivitas 1).*

   Aktivitas 2. Memahami Permutasi

   Mahasiswa memahami permutasi dalam menghitung anggota ruang sampel secara berkelompok *(lihat aktivitas 2).*

   Aktivitas 3: Memahami Kombinasi

   Mahasiswa memahami kombinasi dalam menghitung anggota ruang sampel secara berkelompok *(lihat aktivitas 3).*

4. **Presentasi**

   Dosen memilih 3 kelompok, kemudian meminta wakilnya untuk mempresentasikan hasil kajian. Masing-masing kelompok diminta untuk lebih fokus kepada salah satu dari cara mengetahui anggota ruang sampel dengan:

   - teknik perkalian,
   - permutasi, atau
   - kombinasi.

5. **Penguatan**

   Dosen mengangkat satu/beberapa hal menarik dari hasil kerja kelompok, misalnya kelompok yang masih menyatakan kombinasi sebagai permutasi atau sebaliknya, dan meminta mahasiswa untuk berkomentar.

6. Refleksi

Mahasiswa melakukan refleksi. Refleksi difokuskan pada:

- apa saja yang telah mereka kuasai, dan
- apa saja yang masih belum dipahami.

7. Evaluasi

Dosen memberikan evaluasi berupa salah satu dari soal yang mendorong mahasiswa berpikir tingkat tinggi *(lihat butir evaluasi)*.

8. Tugas

Dosen memberi tugas kelompok untuk mencari kegiatan terkait permutasi dan kombinasi di sekitar kampus.

Aktivitas -Aktivitas Pembelajaran

Aktivitas 1: Teknik Perkalian (Multiplication Technique)

Jika disediakan kartu-kartu bilangan yang bertuliskan angka-angka 1, 2, dan 3.

Ada berapa angka 1-digit yang dapat kalian buat dan berapa saja angka-angka tersebut?

Ada berapa angka 2-digit yang dapat kalian buat dan berapa saja angka-angka tersebut, dengan ketentuan tidak ada angka yang berulang?

Ada berapa angka 3-digit yang dapat kalian buat dan berapa saja angka-angka tersebut, dengan ketentuan tidak ada angka yang berulang?

Tuliskan jawaban pertanyaan-pertanyaan di atas pada tabel di bawah ini.

Banyaknya digit	Angka-angka yang terbentuk	Banyaknya angka yang terbentuk
1		
2		
3		

Perhatikan perolehan dari kegaiatan di atas. Dengan menduga, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

Jika disediakan kartu-kartu bilangan yang bertuliskan angka-angka 1, 2, 3 dan 4.

Ada berapa angka 1-digit yang dapat kalian buat dan berapa saja angka-angka tersebut?

Ada berapa angka 2-digit yang dapat kalian buat dan berapa saja angka-angka tersebut, dengan ketentuan tidak ada angka yang berulang?

Ada berapa angka 3-digit yang dapat kalian buat dan berapa saja angka-angka tersebut, dengan ketentuan tidak ada angka yang berulang?

Ada berapa angka 4-digit yang dapat kalian buat dan berapa saja angka-angka tersebut, dengan ketentuan tidak ada angka yang berulang?

Aktivitas-Aktivitas Pembelajaran

Aktivitas 2: Teknik Perkalian (Multiplication Technique)

Jika disediakan kartu-kartu bilangan yang bertuliskan angka-angka 1, 2, dan 3.

Ada berapa angka 1-digit yang dapat kalian buat dan berapa saja angka-angka tersebut?

Ada berapa angka 2-digit yang dapat kalian buat dan berapa saja angka-angka tersebut, dengan ketentuan memperbolehkan ada angka yang berulang?

Ada berapa angka 3-digit yang dapat kalian buat dan berapa saja angka-angka tersebut, dengan ketentuan memperbolehkan ada angka yang berulang?

Tuliskan jawaban pertanyaan-pertanyaan di atas pada tabel di bawah ini?

Banyaknya digit	Angka-angka yang terbentuk	Banyaknya angka yang terbentuk
1		
2		
3		

Perhatikan perolehan dari kegaiatan di atas. Dengan menduga, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

Jika disediakan kartu-kartu bilangan yang bertuliskan angka-angka 1, 2, 3 dan 4.

Ada berapa angka 1-digit yang dapat kalian buat dan berapa saja angka-angka tersebut?

Ada berapa angka 2-digit yang dapat kalian buat dan berapa saja angka-angka tersebut, dengan ketentuan memperbolehkan ada angka yang berulang?

Ada berapa angka 3-digit yang dapat kalian buat dan berapa saja angka-angka tersebut, dengan ketentuan memperbolehkan ada angka yang berulang?

Ada berapa angka 4-digit yang dapat kalian buat dan berapa saja angka-angka tersebut, dengan ketentuan memperbolehkan ada angka yang berulang?

Dari dua kegiatan di atas, mahasiswa diminta merumuskan formula untuk menghitung banyak bilangan yang dapat dibentuk dari m bilangan dengan p digit dengan ketentuan (1) tidak terdapat angka berulang dan (2) terdapat angka berulang.

Formula untuk menghitung banyak angka (N) yang dapat dibentuk dari m angka yang terdiri atas p digit dapat diturunkan sebagai berikut:

- *Untuk syarat tidak terdapat angka berulang*

$$N = m \times (m-1) \times (m-2) \times (m-3) \times \ldots \times (m-p+1)$$

Posisi digit ke 1: dapat diisi oleh m *bilangan*
Posisi digit ke 2: dapat diisi oleh $(m-1)$ *bilangan*
Posisi digit ke 3: dapat diisi oleh $(m-2)$ *bilangan*
...
Posisi digit ke p: dapat diisi oleh $(m-p+1)$ *bilangan*

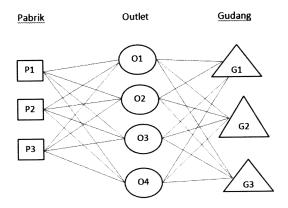
- *Untuk syarat terdapat angka berulang*

$$N = m \times m \times m \times \ldots \times m_p$$

Posisi digit ke 1: dapat diisi oleh m *bilangan*
Posisi digit ke 2: dapat diisi oleh m *bilangan*
Posisi digit ke 3: dapat diisi oleh m *bilangan*
...
Posisi digit ke p: dapat diisi oleh m_p *bilangan*

Latihan Berkelompok

Mahasiswa diminta pada kelompok masing-masing melakukan diskusi untuk menerapkan konsep perkallian di atas untuk memecahkan kasus berikut:

1. Perusahaan PT. Mandiri Pratama memiliki 3 pabrik, 4 *outlet*, dan 3 gudang yang terhubung satu sama lain seperti pada gambar berikut:

   Pertanyan:

   1. Berapa banyak jalur yang dapat ditempuh dari seluruh pabrik ke seluruh gudang?
   2. Sebutkan seluruh jalur yang dapat ditempuh tersebut.

2. Nomor urut peserta ujian terdiri atas 4 angka yang dibentuk dari angka 0,1,2,...,9. Angka yang tidak diperkenankan adalah: 0000. Tentukan banyaknya mahasiswa yang mendapat nomor ujiannya.

Tugas Berkelompok

Ketentuan nomor pelat kendaraan yang ditetapkan oleh satlantas adalah sebagai berikut:

a. Terdiri atas maksimum 4 angka dan minimum 1 angka serta diikuti 2 huruf seri.
b. Angka yang tidak dapat diterima adalah 0000.
c. Tidak boleh angka nol di depan.
d. Seri terdiri atas 2 huruf dari empat huruf A, B, C, dan D.
e. Diperbolehkan angka dan huruf yang berulang.
f. Nomor pelat kenderaan yang dikeluarkan berurut mulai dari nomor terkecil hingga terbesar.

Jika satlantas tersebut telah mengeluarkan pelat kendaraan: **4518 AD,** berapa banyakkah kendaraan yang sudah mendapat pelat kendaraan yang dikeluarkan satlantas tersebut?

Aktivitas 2: Permutasi

Permutasi banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari. Berikut diberikan salah satu contoh.

Jika kita mempunyai nomor kombinasi untuk kunci koper 159, apakah koper akan terbuka jika kita menggunakan nomor kombinasi 519?

Jawab: …… , Alasan: ……………………………………

Tugas 1.

Sediakan dua kursi di depan kelas. Lalu diminta sejumlah mahasiswa untuk menduduki kursi tersebut. Mahasiswa lainnya menuliskan urutan yang terbentuk dengan mengisi tabel berikut:

Banyak Mahasiswa	Nama Mahasiswa	Kursi 1	Kursi 2	Banyak Susunan yang Mungkin	Formula
2					
3					

Buatlah dugaan banyaknya susunan yang mungkin dengan memperhatikan hasil dari aktivitas di atas jika banyaknya mahasiswa 4.

Cek kebenaran dugaan tersebut dengan mendaftar posisi tempat duduk itu.

Lakukan kegiatan berikutnya dengan menambahkan satu kursi lagi. Kegiatan ini bertujuan mengiring mahasiswa untuk dapat menemukan formula guna menghitung permutasi dari r objek dari n objek yang ada.

Permutasi n objek berlainan dari r objek dilambangkan P_r^n .

Banyak permutasi n objek berlainan bila diambil r objek sekaligus adalah $P_r^n = ...$

Catatan untuk Dosen

Dosen perlu menambah kasus (misalnya penambahan banyak mahasiswa dan kursi) sehingga mahasiswa dapat mencapai kesimpulan yang diinginkan.

Evaluasi

Tiap kelompok mahasiswa diminta menjawab pertanyaan berikut dengan mengimplementasikan rumus permutasi di atas.

1. Lima buku yang terdiri atas matematika, fisika, biologi, kimia, dan bahasa Indonesia akan disusun dalam rak. Tentukan banyaknya susunan yang mungkin dan sebutkan susunan tersebut.
2. Enam mahasiswa (A, B, C, D, E, dan F) menonton di suatu bioskop dan mendapat tempat duduk C1 hingga C6. Tentukan banyaknya komposisi duduk enam mahasiswa tersebut dan sebutkan komposisi itu.

3. Sebutkan lima peristiwa dalam kehidupan sehari-hari yang merupakan implementasi permutasi.

Tugas Berkelompok

Setelah selesai menonton, enam mahasiswa tersebut (A, B, C, D, E, dan F) makan di suatu restoran yang mejanya merupakan meja bundar dengan kapasitas enam orang. Tentukan banyaknya komposisi duduk mereka dan sebutkan komposisi tersebut.

Aktivitas 2: Kombinasi

Misalnya akan dibentuk pasangan untuk melakukan survei lapangan untuk pengumpulan data, mahasiswa diminta untuk menentukan banyak tim yang terbentuk dan komposisi tim dimaksud dengan mengisi tabel berikut:

Banyak Mahasiswa	Nama Mahasiswa	Anggota Tim (2 org)	Banyak Susunan yang Mungkin	Formula
2				
3				
4				

Buatlah dugaan banyaknya susunan yang mungkin dengan memperhatikan hasil dari aktivitas di atas jika banyaknya mahasiswa 5.

Cek kebenaran dugaan tersebut dengan mendaftar tim itu.

Lakukan kegiatan berikutnya dengan menambahkan satu kursi lagi. Kegiatan ini bertujuan mengiring mahasiswa untuk dapat menemukan formula guna menghitung kombinasi $r$objek dari n objek yang ada.

Kombinasi n objek berlainan dari r objek dilambangkan C_r^n .

Dosen perlu menambah kasus (misal penambahan banyak mahasiswa dan kursi) sehingga mahasiswa dapat mencapai kesimpulan yang diinginkan.

Jumlah kombinasi dari n benda yang berlainan bila diambil sebanyak r adalah

$$C_r^n = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = ...$$

Evaluasi

Tiap kelompok mahasiswa diminta menjawab pertanyaan berikut dengan mengimplementasikan rumus kombinasi di atas.

1. Tersedia lima warna cat, yakni merah, biru, kuning, hijau, dan putih. Akan dibuat cat dengan mencampurkan dua warna cat dengan komposisi yang sama. Berapa banyak warna cat baru yang terbentuk?.
2. Enam mahasiswa (A, B, C, D, E, dan F) akan membentuk kelompok belajar yang terdiri atas tiga orang. Ketentuan tambahan bahwa si A tidak dapat bergabung baik dengan si C dan si F. Berapa banyak kelompok belajar yang dapat dibentuk?

Tugas Berkelompok

Terdapat enam mahasiswa dalam satu kelompok. Mereka adalah A, B, C, D, E, dan F. Dua di antara mereka adalah perempuan, yakni B dan F. Untuk melaksanakan tugas kelompok, mereka akan berbagi tugas untuk mengumpulkan data ke lapangan dan mencari referensi pendukung. Tim pengumpul data terdiri atas tiga orang dan satu di antaranya harus perempuan. Sementara tim pencari referensi terdiri atas dua orang dan tidak boleh kedua-duanya laki-laki.

Berapa banyak komposisi tim pengumpul data dan pencari referensi yang dapat dibentuk?

3. Percobaan, Ruang Sampel, dan Kejadian, serta Frekuensi Relatif

3.1 Fakta Pembelajaran

Percobaan merupakan suatu proses yang berulang-ulang dan hasil proses itu tidak dapat diramalkan dengan pasti sebelumnya. Ketika percobaan diulangi, hasil-hasil yang diperoleh tidak selalu sama walaupun dilakukan dengan kondisi yang tepat sama dan secara hati-hati. Melalui percobaan akan diperoleh data mentah. Konsep awal yang harus dipahami dalam materi peluang adalah ruang sampel dan titik sampel.

3.2 Proses Pembelajaran

Merujuk pada pola umum alur pembelajaran yang dijelaskan pada bab II, alur pembelajaran untuk topik 'Percobaan, Ruang Sampel, dan Kejadian' ini tergambar pada diagram 6 berikut dengan petak-petak berwarna kuning.

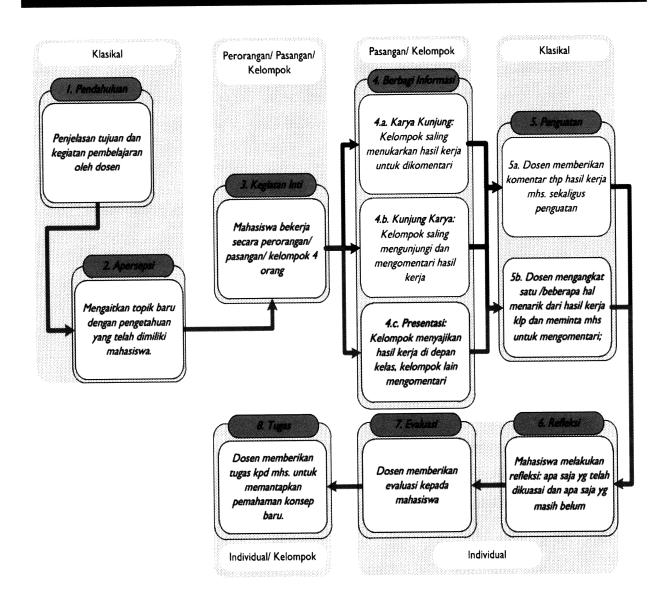



Diagram 6. Alur Pembelajaran 'Percobaan, Ruang Sampel, dan Kejadian'

Keterangan:

1. **Pendahuluan**

   Dosen menyampaikan tujuan dan kegiatan yang akan dilakukan dalam perkuliahan, yaitu mahasiswa memahami prinsip-prinsip percobaan, kejadian, dan ruang sampel dari suatu kejadian.

2. **Apersepsi**

   Mahasiswa diingatkan pentingnya memahami prinsip percobaan, kejadian, dan ruang sampel dari suatu kejadian.

3. **Kegiatan Inti**

   Aktivitas 1. Memahami Konsep Ruang Sampel

   Mahasiswa, secara berkelompok, melakukan percobaan melempar uang, dan mengidentifikasi ruang sampel yang terjadi dengan membuat tabel kemungkinan *(lihat aktivitas 1).*

   Aktivitas 2. Menyusun Kejadian

   Mahasiswa memahami permutasi dalam menghitung anggota ruang sampel secara berkelompok *(lihat aktivitas 2).*

   Aktivitas 3. Menyusun Kejadian

   Mahasiswa, secara berkelompok, memahami frekuensi relatif dengan melakukan percobaan lantunan koin *(lihat aktivitas 3).*

4. **Presentasi**

   Semua kelompok harus mempresentasikan hasil kajian. Masing-masing kelompok diminta untuk lebih fokus pada:

   - apakah yang dimaksud dengan ruang sampel,
   - bagaimanakah menyusun kejadian, dan
   - bagaimanakah mengetahui besaran frekuensi relatif dari sebuah percobaan.

5. **Penguatan**

   Dosen mengangkat satu/ beberapa hal menarik dari hasil kerja kelompok, misalnya kelompok yang masih menyatakan belum dapat menemukan konsep ruang sampel kejadian, dan meminta mahasiswa untuk berkomentar.

6. **Refleksi**

   Mahasiswa melakukan refleksi. Refleksi difokuskan pada:

   - apa saja yang telah mereka kuasai, dan
   - apa saja yang masih belum dipahami.

7. **Evaluasi**

   Dosen memberikan evaluasi berupa salah satu dari soal yang mendorong mahasiswa berpikir tingkat tinggi *(lihat butir evaluasi).*

8. **Tugas**

   Dosen memberi tugas kelompok untuk mencari kejadian dan ruang sampel dari kejadian di sekitar kampus.

Aktivitas-Aktivitas Pembelajaran

Aktivitas 1: Memahami Konsep Ruang Sampel

Kegiatan ini dilakukan secara berkelompok. Tiap mahasiswa diminta menuliskan segala kemungkinan dari percobaan berikut ini.

1. Melantunkan sebuah koin.
2. Melantunkan sebuah dadu.
3. Melantunkan dua buah koin sekaligus.
4. Melantunkan tiga buah koin sekaligus.
5. Melantunkan sebuah koin dan sebuah dadu sekaligus.
6. Melantunkan dua buah dadu sekaligus.

Hasil kegiatan ini disajikan ke dalam tabel berikut.

No.	Percobaan	Kemungkinan dari hasil percobaan	Banyak kemungkinan
1.			
2.			
3.			
4.			

Petunjuk untuk Dosen

Melalui kegiatan ini, diharapkan mahasiswa dapat memberikan pengertian dari ruang sampel dan titik sampel serta menemukan konsep untuk menghitung banyak titik sampel dari suatu perobaan. Dari kegiatan di atas, tiap kelompok mahasiswa diminta menuliskan ruang sampel untuk tiap percobaan. Sebagai contoh, ruang sampel untuk percobaan 3 adalah:

S = {GG, GA, AG, AA}, G = Gambar, dan A = Angka.

Aktivitas 2: Menyusun Semua Kejadian

Mahasiswa diminta menuliskan semua kemungkinan.

"Jika dalam suatu warung terdapat lima jenis minuman, yaitu jus sirsak, stroberi, wortel, jambu, dan alpukat, kemudian terdapat dua jenis makanan, yaitu nasi goreng dan bubur ayam, tuliskan semua kemungkinan dari pasangan dengan 1 makanan dan 1 minuman yang dapat dipesan di warung tersebut".

Setiap kelompok harus menggunakan cara yang berbeda dalam menyusun pasangan makanan dan minuman. Cara yang dapat dipilih adalah:

1. Diagram pohon
2. Diagram Cartesius
3. Tabel
4. Cara mendaftar

Setiap mahasiswa diharapkan menguasai keempat cara tersebut. Untuk itu, setiap kelompok harus mempresentasikan cara dan hasil yang diperoleh.

Teori

- Ruang sampel adalah kumpulan dari semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan. Setiap unsur dalam ruang sampel disebut titik sampel.
- Hasil yang diamati dalam suatu percobaan disebut hasil (*outcome*).
- Jika hanya tertarik pada hasil-hasil tertentu dari ruang sampel, hasil-hasil tertentu ini disebut sebagai suatu kejadian (*event*).

Aktivitas 3: Memahami Frekuensi Relatif

Kegiatan:

Setiap mahasiswa diminta melakukan pelantunan sebuah koin sebanyak 5 kali secara serentak. Mereka harus mencatat hasil yang diperoleh pada setiap lantunan koin, apakah gambar (G) atau angka (A).

Hasil

Misalkan terdapat 30 mahasiswa, dari tiap tahap pelantunan koin akan diperoleh data sebanyak 30. Total data yang akan diperoleh adalah 150 data. Selanjutnya, catatlah hasil percobaan pada tabel berikut:

Tahap	Total Muncul Gambar (G)	Total Lantunan	$\frac{\text{Total Muncul Gambar}}{\text{Total Lantunan}}$
1			
2			
3			
4			
5			

Dari hasil kegiatan dan pencatatan dalam tabel tersebut, jika total pelantunankin ditingkatkan menjadi sangat besar, bagaimanakah dengan nilai dari

$$\frac{\text{Total Muncul Gambar}}{\text{Total Lantunan}}?$$

Petunjuk untuk Dosen

Jika total pengetosan ditingkatkan lagi, frekuensi relatif munculnya muka G akan mendekati suatu bilangan tertentu, yaitu ½. Nilai inilah yang dinamakan frekuensi relatif munculnya muka G.

Evaluasi

1. PT "ELOK" ingin berinvestasi di perusahaan lain. Untuk menentukan tempat berinvestasi, perusahaan tersebut melakukan penelitian dan pengamatan terhadap perusahaan A, B, C, dan D mengenai reputasi masing-masing perusahaan itu. Hasil penelitian dan pengamatan selama beberapa waktu diperoleh data tentang probabilitas reputasi baik P(x) dan tidak bagus P(y) sebagai berikut:

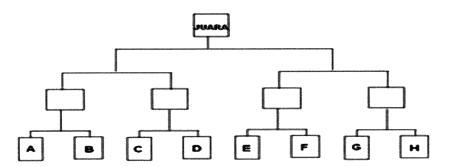
   Perusahaan A : P(x) = 0,75 dan P(y) = 0.25

   Perusahaan B : P(x) = 0,8 dan P(y) = 0.2

   Perusahaan C : P(x) = 0,6 dan P(y) = 0.4

   Perusahaan D : P(x) = 0,7 dan P(y) = 0.3

   Ke mana dana PT "ELOK" sebaiknya diinvestasikan dan dengan pertimbangan apa?

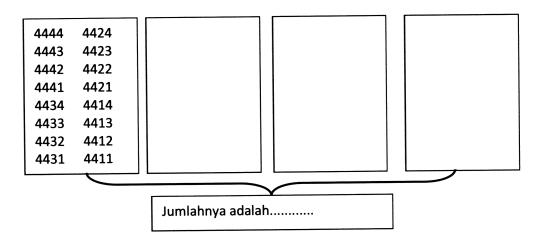
2. Perempat final Liga sepak bola 2014 akan diikuti 8 tim A, B, C, D, E, F, G, dan H yang bertemu seperti tampak dalam undian berikut:

   a) Mungkinkah tim A bertemu D di final? Jika mungkin, berapa peluang A menjadi juara liga?

   b) Mungkinkah tim A bertemu F di final? Jika mungkin, berapa peluang A menjadi juara liga?

3. Bu Lilis hendak menanami halaman belakang dan halaman depan rumahnya dengan tanaman bunga mawar. Tersedia 5 ikat batang bunga mawar kuning, 3 ikat batang bunga mawar merah, dan 2 ikat batang bunga mawar putih. Ia mengambil 5 ikat batang secara acak untuk ditanam di halaman depan, sedangkan 5 ikat batang sisanya ditanam di halaman belakang.

a) Peluang manakah yang lebih besar jika tanaman tersebut ditanam di halaman depan semuanya batang warna kuning, atau campuran 3 batang mawar kuning dan 1 batang mawar merah dan 1 batang mawar putih?

b) Tentukan tahapan perhitungan untuk menjawab pertanyaan a.

4. Bilangan-bilangan 1, 2, 3, dan 4 digunakan untuk menghasilkan 256 bilangan yang terdiri atas 4 angka (digit). Angka-angka ini bisa dipakai berulang-ulang seperti bilangan 4444 atau 2121. Bagaimana Anda menghitung jumlah jumlah 64 bilangan terbesar?

5. Sebuah toko menyediakan 100 kupon bagi pembelinya. Di antara 100 kupon tersebut, hanya ada 10 kupon yang berhadiah, yaitu 4 di antaranya berhadiah televisi, 4 berhadiah *VCD player,* dan 2 berhadiah *rice cooker.* Misalkan seorang pembeli mendapat kesempatan untuk mengambil 2 kupon yang harus diambil secara acak dari 100 kupon yang ada.

   a) Peluang manakah yang lebih besar, pembeli tersebut memenangkan keduanya TV atau sebuah *VCD player* dan sebuah *rice cooker?*

   b) Apa sajakah yang harus ditentukan untuk menjawab pertanyaan di atas?

6. Tersedia biji-bijian berwarna putih 1 kantong dan biji-bijian berwarna hitam 3 kantong. Jumlah biji-bijian pada setiap kantong sama dan pilihlah biji-bijian dengan bentuk dan ukuran sama.

Campur semua biji-bijian dalam wadah/kotak. Minta salah satu siswa wakil kelompok mengambil segenggam biji-bijian dan meletakkan di meja. Minta setiap kelompok untuk memprediksi mana dari berikut ini yang mempunyai kemungkinan paling besar jika mereka mengambil empat biji-bijian dari wadah/kotak dengan mata tertutup.

a) 3 putih dan 1 merah
b) 2 putih dan 2 merah
c) 1 putih dan merah 3
d) 4 putih
e) 4 merah

Ulangi masukkan semua biji ke kotak, kemudian diminta setiap mahasiswa mengambil empat biji tanpa melihat, catat semua hasilnya. Berdasar catatan hasil percobaan tersebut, diskusikan hasilnya. Bagilah biji pada setiap kelompok dan pastikan mahasiswa benar-benar menghitung jumlah biji merah dan putih. Bandingkan jumlah total biji-bijian ini dengan sampel genggam dari empat biji.

7. Dalam sebuah "lomba membuat donat" yang diikuti 100 orang di Kota "A", dipilih 10 donat yang memiliki rasa dan bentuk yang berbeda dari 10 orang terpilih. Oleh tim juri, donat diberi label D0, D1, hingga D9. Tidak diketahui secara pasti siapa yang menang. Tetapi, perhatikan kejadian saat penjurian.
   - Kejadian pertama, juri pertama mengambil secara acak 3 buah donat.
   - Kejadian kedua, setelah 3 donat diambil juri pertama, juri kedua ikut mengambil 4 buah donat.

   a. Bagaimana Anda menghitung peluang juri pertama mendapatkan donat dengan label D0, D1, D9?
   b. Bagaimana Anda menghitung peluang mendapatkan donat dengan D2, D3, D4, D5?

8. Setelah pulang dari sekolah, Candra diminta memilih 2 di antara 3 kegiatan ekstrakurikuler yang akan dilaksanakan dalam waktu 2 bulan. Kegiatan tersebut terdiri atas belajar komputer, fotografi, dan elektronika. Tiap kegiatan dilaksanakan selama 1 bulan. Dalam 1 bulan, Chandra hanya boleh melakukan satu kegiatan.

Setelah 1 bulan, Candra memilih satu kegiatan lagi. Candra dapat memilih kegiatan yang sama pada bulan kedua.

a) Berapa banyak pilihan kegiatan yang dapat dilakukan Candra pada bulan pertama?
b) Berapa banyak pilihan kegiatan yang dapat dilakukan Candra pada 2 bulan tersebut?
c) Tulislah ruang sampel dari kegiatan tersebut!

LAMPIRAN